大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程

理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【Ⅰ】【Ⅱ】

２０２４年8月２２日（木）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

1．この冊子には物理学【I】、物理学【II】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

2．答案用紙は黄、赤を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

3．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学 [I] (答案用紙：黄)

地球が作る重力場中での質量 m の質点の運動を考える．地球は一定の周期 $2\pi/\omega$ で自転している．なお以下では物理量 A の時間 t に関する微分を $\dot{A}$ で表す．

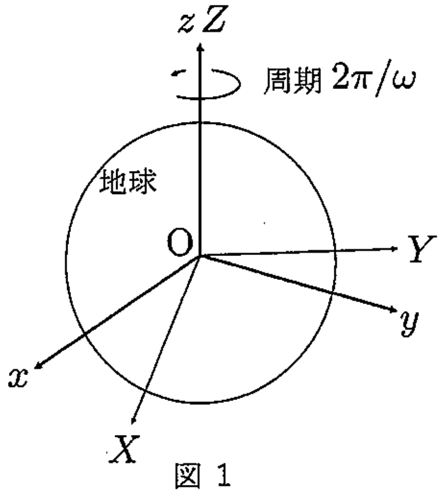

図 1

地球の中心はある慣性系に対して静止しているとする．図１のように地球の中心を原点 O とし，自転軸を z 軸にとり，慣性系での質点の座標を (x, y, z) とする．地球の自転とともに回転する座標系での質点の座標を (X, Y, Z) としたとき，時刻 t での２つの座標系の関係は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} X &= x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t) \\ Y &= -x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t) \\ Z &= z \end{aligned}$$

２つの座標系はデカルト座標系で，原点 O を共通にする．地球が作る重力ポテンシャルは $U(r)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ とする．

問１ この系の質点のラグランジアンを x, y, z およびその時間微分を用いて与えよ．

問２ 問１のラグランジアンを X, Y, Z およびその時間微分を用いて書き直せ．

問３ 問２の結果を用いて，地球の自転とともに回転する座標系での質点の運動方程式を導き，その各成分を与えよ．

問４ $\vec{R} = (X, Y, Z)$，$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ とおく．問３で求めた運動方程式に現れる慣性力（みかけの力）のうち ω に比例する項を，$\vec{R}$ と $\vec{\omega}$ およびそれらの時間微分の中から適当なものを用いて与えよ．

問５ 問３で求めた運動方程式に現れる慣性力で，ω および ω^2 に比例する力のそれぞれの名前を述べよ．

北半球（北緯 λ）の地上にある振り子の運動を，地球の自転とともに回転する座標系で考える．図 2 のように新たに座標系を取り直し，振り子の支点を原点 O とし，z 軸を鉛直上向き，xy 平面を水平面（x 軸を東向き，y 軸を北向き）にとる．振り子の他端には質量 m の質点がつけられている．振り子の糸の長さは l とする．以下では，地球の自転の角速度 ω は十分小さく，慣性力のうち ω に比例する力のみを考慮して振り子の運動を考える．

質点に働く重力は $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ (g: 重力加速度の大きさ，定数）で与えられる．振り子の糸は地球半径より十分に短く，その質量は無視でき，運動中はたるむことはない．

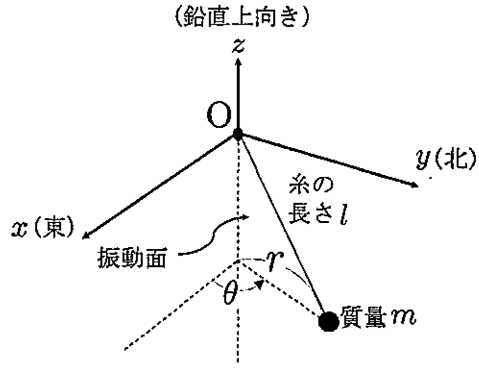

図 2

問 6 振り子の糸の張力を T とし，質点に糸から働く力の各成分を，T，l，質点の座標 x, y, z を用いて表せ．

問 7 問 4 の $\vec{\omega}$ は，この座標系では $\vec{\omega} = (0, \omega\cos\lambda, \omega\sin\lambda)$ に置き換えられる．問 4 と問 6 の結果を使って質点の運動方程式を導き，その各成分を T，l，g，m，ω，λ，質点の座標 x, y, z およびその時間微分を用いて表せ．なお，原点 O の位置の違いで問 4 の結果は変わらないことを使って良い．

問 8 振り子の運動が z 軸を通過する微小振動である場合を考える ($\sqrt{x^2+y^2} \ll l$，$z \simeq -l$，$\dot{z} \simeq 0$)．地球の自転に伴って，振り子の振動面は時間とともに回転する．以下の問いに答えよ．

問 8-1 振り子の角振動数 ω_0 と糸の張力 T を l，g，m の中から適当なものを用いて与えよ．なお，慣性力の効果は十分小さいとして無視して良い．

問 8-2 振動面の回転を記述するため，図 2 のように二次元座標 (r, θ) ($x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$) を導入する． $L \equiv x\dot{y} - \dot{x}y$ を r，θ およびその時間微分を用いて書き直せ．

問 8-3 質点の運動方程式を使って，L を l，g，ω，λ，および問 8-2 で導入した r, θ の中から適当なものを用いて表せ．なお，時刻 $t=0$ で質点は $r=0$ にあったとする．

問 8-4 問 8-2 と問 8-3 の結果を使って，振り子の振動面の回転の周期を与えよ．

1 次元井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq a) \\ +\infty & (x > a) \end{cases}$$

のなかを運動する質量 m の粒子の量子力学を考える。a は正の定数で，プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

問 1 $0 \leq x \leq a$ における，時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書き下せ。また，$x=0$ および $x=a$ において波動関数が満たすべき接続条件を述べよ。

問 2 問 1 のシュレーディンガー方程式と接続条件のもとでは，負のエネルギーを持つ解は存在しないことを示せ。

問 3 規格化されたエネルギー固有関数 $u_n(x)$ とエネルギー固有値 E_n を求めよ。ただし，基底状態の波動関数とそのエネルギーをそれぞれ $u_1(x)$, E_1 とし，n が 1 つ増えるごとにエネルギー準位が 1 つ上がるとする。

問 4 波動関数が $u_2(x)$ で与えられる第 1 励起状態について，位置の確率密度の概形を図示せよ。また，この状態にある粒子の位置を測定したとき，最も得られやすい値を答えよ。

つぎに，以下の規格化された波動関数を考える。

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \sqrt{\dfrac{30}{a^5}}\, x(a-x) & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

問 5 $\psi(x)$ に関する位置のゆらぎ $\Delta x = \sqrt{\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle}$ を求めよ。ここで，波動関数 $\psi(x)$ で記述される状態に関する物理量 $\mathcal{O}$ の期待値を $\langle \mathcal{O} \rangle$ とした。

問 6 問 3 で求めた規格化されたエネルギー固有関数 $u_n(x)$ を用いて，$\psi(x)$ を展開する。

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

展開係数 c_n を求めよ。

問 7 波動関数 $\psi(x)$ で記述される状態のエネルギーを測定した時, 個々の測定ではどのような結果がどのような確率で得られるか述べよ。

問 8 $\psi(x)$ に関するエネルギー期待値を求めよ。なお, 無限和に関する以下の公式を用いてよい。

$$\sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

問 9 波動関数 $\psi(x)$ で記述される状態のエネルギーを測定し, E_1 の値を観測した時に限り, 粒子の位置の測定を引き続き行う。この操作を繰り返して得られる位置の平均値を計算せよ。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【III】【IV】

２０２４年8月２２日（木）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【III】、物理学【IV】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は青、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

1897年にトムソンは電子を発見し，「原子の中に電子がある」という事実が明らかとなった。トムソンは原子の構造として，正の電荷を持った球（電荷球）の中に電子が埋め込まれている「トムソン模型」を提案した。以下ではこのトムソン模型において中性水素原子を想定し，その内部の電子の運動を古典力学で考える。実際には電子が加速度運動をすると，光が放出されエネルギーを失うが，これは無視する。また摩擦は存在せず，電磁気力以外の相互作用は無視できるとする。電子の質量を m，電気素量を e，電子の電荷量を $-e$，電荷球の電荷の総量を $+e$，電荷球の半径を R とする。電荷球内の電荷密度は一様とし，電荷球の誘電率と透磁率はそれぞれ真空の値 ε_0，μ_0 とする。電荷球の質量は m よりも十分に大きく，電子が加速度運動をしても電荷球は動かないとする。電荷球の中心を原点Oとしてx-y-zの右手系の直交座標を定義し，原点Oからみた電子の位置ベクトルを $\vec{r}=(x,\ y,\ z)$, $r=|\vec{r}|$ とする。以下の問では，常に $r<R$ とする。なお，加速度は $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，速度は $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}=(v_x,\ v_y,\ v_z)$ を用いよ。

問1 電荷球の電荷分布が原点Oについて球対称であることから，$\vec{r}$ の位置での電場は $\vec{E}(\vec{r})=E(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}$ となる（ここで $\dfrac{\vec{r}}{r}$ は $\vec{r}$ 方向の単位ベクトル）。電場のガウスの法則を用いて，$E(r)$ が r に比例すること，すなわち $E(r)=Kr$ となることを示せ。また K を m, e, R, ε_0 の中から適当なものを用いて書け。

問2 電子の運動方程式を書け。ただし，前問の K を用いて表すこと。

問3 初期条件として，時刻 $t=0$ に，電子が $\vec{r}=(x_0, y_0, 0)$ の位置において，$\vec{v}=(0, 0, 0)$ であった。その後のこの電子の位置を $\vec{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$ とするとき，$x(t), y(t), z(t)$ を，m, e, x_0, y_0, K, および時刻 t を用いて書け。

次に問3と同じ初期条件で，x 軸の正方向に大きさ E_0 $(E_0>0)$ の一様な外部電場をかけた。ただし，ここでも常に $r<R$ とする。

問4 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ を，m, e, x_0, y_0, E_0, K, および時刻 t を用いて書け。

以下では $E_0=0$ とする。z 軸の正方向に磁束密度 B $(B>0)$ の一様な外部磁場をかけた。ただし，ここでも常に $r<R$ とする。

問5 電子の運動方程式を，$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ の各成分について書き下せ。ただし，運動方程式に現れる定数には，m, e, B, K を用いること。

問6 i を虚数単位として $u(t) = x(t) + iy(t)$ となる $u(t)$ を定義する。$u(t)$ が満たす微分方程式を m, e, B, K を用いて書け。ただし，u の1階および2階の時間微分をそれぞれ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u$ と表すこと。

問7 前問の微分方程式の解の形を $u(t) = C\exp(i\lambda t)$ と仮定する。これを前問の微分方程式に代入し，λ が満たす条件式を導け。λ, C は定数とする。

問8 このとき，電子の位置 $\vec{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ に対し，$x(t),\ y(t)$ は2つの単振動を線型結合したものとなる。この単振動の角振動数 λ_1, λ_2 を求めよ。ただし $\lambda_1 > \lambda_2$ とする。

問9 新たな初期条件として，時刻 $t = 0$ における電子の位置と速度がそれぞれ $\vec{r} = (x_0, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 0, 0)$ であったとする。その後の電子の位置 $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ を，x_0, 時刻 t, および前問の λ_1, λ_2 を用いて書け。

体積 V の立方体の容器の中に質量 m の区別ができない単原子分子 N 個からなる理想気体が入っており、温度 T の熱浴と熱平衡状態にある。N は十分大きいとする。各分子の位置 $\boldsymbol{r}_i$ のデカルト座標での各成分を x_i、y_i、z_i、運動量 $\boldsymbol{p}_i$ のデカルト座標での各成分を p_{ix}、p_{iy}、p_{iz}（ただし $i = 1, 2, \cdots N$）と表すと、ハミルトニアン H は次の式で与えられる。

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2m}$$

これらの分子の運動は古典力学に従うものとし、輻射の効果はすべて無視する。プランク定数を h、ボルツマン定数を k とする。ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a > 0)$、ガンマ関数 $\Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-y} y dy = 1$、$\Gamma(\frac{5}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ を用いてよい。

問 1　以下の問いに答えよ。

(a) 分配関数 $Z(T, V, N)$ を求めよ。

(b) 自由エネルギー F を求めよ。ただしスターリングの公式 $\ln N! \sim N \ln N - N$ を用いよ。

(c) 問 1(a) と問 1(b) で求めた Z や F にもとづいて、圧力 P と内部エネルギー U を導出せよ。

(d) 分子 1 個の速度を $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とする。$\boldsymbol{v}$ の各成分が v_x から $v_x + dv_x$、v_y から $v_y + dv_y$、v_z から $v_z + dv_z$ の間の値を持つ確率は、速度の分布関数 $f(\boldsymbol{v})$ を用いて $f(\boldsymbol{v})dv_x dv_y dv_z$ と書ける。$f(\boldsymbol{v})$ を書き下せ。ここで dv_x、dv_y、dv_z は微小量とする。

(e) 分子 1 個の速さを $v = |\boldsymbol{v}|$ とする。ある分子の速さ v が、v から $v + dv$ の間の値を持つ確率は $F(v)dv$ と書ける。$F(v)$ を求めよ。

(f) 速さの平均値 $\langle v \rangle$、および速さの 2 乗の平均値 $\langle v^2 \rangle$ を求めよ。

（裏に続く）

この容器に図1のように面積 S の十分に小さな穴を静かにあける。S は容器の表面積にくらべて十分小さいとする。容器の外部は真空とし、穴を通過する粒子がそのままの速度で容器から出ていくものとする。また、容器中の温度は一様に保たれ、熱平衡状態は乱されないものとする。

問 2　以下の問い答えよ。

(a) 穴をあけた直後の短い時間 dt の間に穴を通過する粒子の数 dN を $f(\boldsymbol{v})$ を用いて表せ。ここで穴を通過する粒子の速度の各成分は v_x から $v_x + dv_x$、v_y から $v_y + dv_y$、v_z から $v_z + dv_z$ の間の値を持ち、dN は N に比べて十分小さいものとする。ここで v_z と $v_z + dv_z$ は正とする。

(b) 穴をあけた直後に、単位時間あたりに穴から出ていく粒子の数 R を速さの平均値 $\langle v \rangle$ を用いて表せ。

(c) 容器に働く力の大きさを考える。穴が無いとき容器に働く力はゼロである。穴をあけた直後に容器に働く力の大きさ F_P を求めよ。

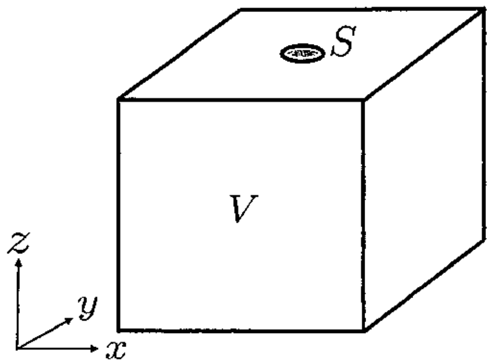

図 1