大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【Ⅰ】【Ⅱ】

２０２３年8月２３日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は黄、赤を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学 [I] (答案用紙：黄)

図1のように、中心が原点Oにある半径 R の軽い円形のリングが鉛直に立てられている。そのリングに沿って質量 m の質点が摩擦なしに自由に動けるとする。図1のように鉛直上向きを z 軸の正の方向にとり、質点のリング上の位置は、z 軸の負の方向からの角度 θ で指定する。ただし、リングは変形せず、リングの質量は無視できるとし、リングの中心は原点Oから動かないとする。重力加速度の大きさを g とし、θ の初期値はゼロでないとして、以下の問いに答えよ。

まず、図2のようにこのリングが、z 軸を回転軸として一定の角速度 $\omega\,(\omega > 0)$ で回転しているとき、リング上の質点の動きに注目する。

問1. 重力による質点のポテンシャルエネルギー V を θ を用いて表せ。

問2. θ を力学変数として、質点の速度の大きさを表せ。

問3. θ を力学変数として、この系のラグランジアン L を求め、運動方程式を書き下せ。

問4. 角速度 ω がある値 ω_c を超えると、質点は安定な平衡点 $\theta_e \neq 0$ のまわりで小さく振動することができるようになる。ω_c と θ_e を求めよ。

問5. $\omega > \omega_c$ の時、θ_e からの微小変位を $\delta\theta$ として、微小振動を表す運動方程式を求め、その周期を求めよ。ただし、$\theta = \theta_e + \delta\theta$、$|\delta\theta| \ll 1$ とせよ。

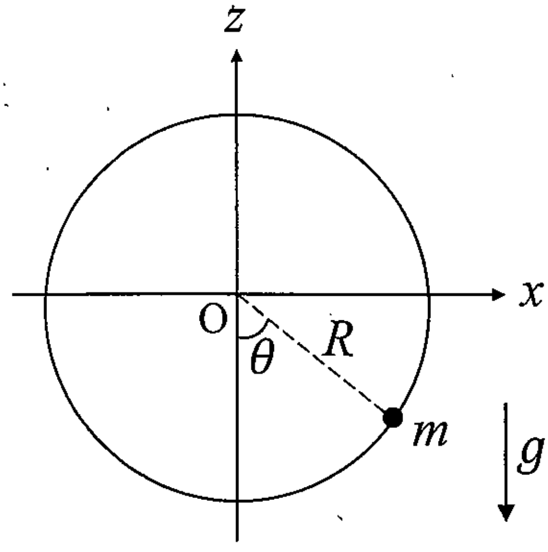

図1

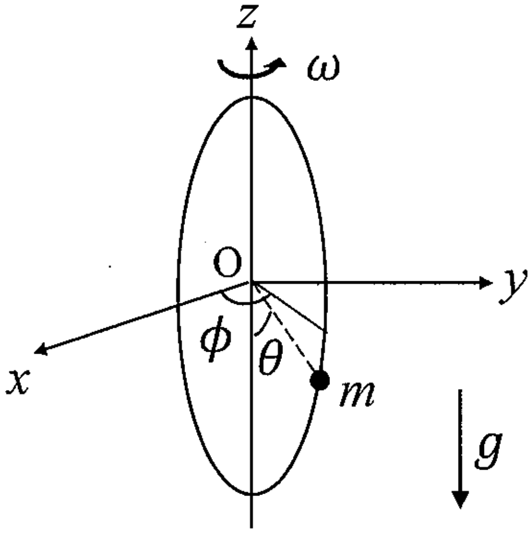

図2

次に、リングが z 軸を回転軸として、一定の角速度ではなく、摩擦なく自由に回転できる状況を考える。図 2 のように z 軸まわりのリングの回転角 ϕ も力学変数とする。初期値として、$\theta = \theta_0 \neq 0$、$\dot{\theta} = 0$、$\dot{\phi} = \omega_0 \ll \omega_c\,(\omega_0 > 0)$ とする。ここで、$\dot{\theta}$ と $\dot{\phi}$ はそれぞれ θ と ϕ の時間微分である。

問 6. θ と ϕ を力学変数として、この系のラグランジアンと運動方程式を求めよ。

問 7. この系が持つ 2 つの保存量を力学変数を用いて書き下せ。

問 8. 質点の運動はどのようになるか、理由とともに記述せよ。特に $\theta = 0$ を通過するかどうかを含めること。

物理学 [II] (答案用紙：赤)

平行導体板とその等価回路に関する以下の問いに答えよ．必要なら次のマクスウェル方程式を参考にせよ．($\boldsymbol{E}$ は電場, $\boldsymbol{B}$ は磁束密度, ε_0 は真空の誘電率，μ_0 は真空の透磁率, ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

問 1 真空中に，厚さの無視できる幅 a の導体板 2 枚を，z 方向に間隔 b だけ離して xy 平面に平行に固定して配置する（図 1)．x 方向の長さ，および y 方向の幅 a は，間隔 b に比べて十分長いものとする．平行導体板の端における電磁場の乱れ，および平行導体板の周囲の電磁場による影響は無視して考える．

2 つの導体板に等量の正負の電荷を一様に分布させる．図 1(a) のように，この平行導体板において x 方向の長さ Δx の領域を考える．この領域における上の導体板の電気量を $+q$，下の導体板の電気量を $-q$ とする（$q > 0$)．

(1-1) 導体板間に形成される電場 $\boldsymbol{E}$ の向き及び大きさを求めよ．

(1-2) この平行導体板の長さ Δx あたりの静電容量を求めよ．

次に，図 1(b) のように，上の導体板に $+x$ 方向，下の導体板に $-x$ 方向の，大きさ I（$I > 0$）の直流電流を流す．導体板の抵抗による電圧降下は無視できるとし，導体板上の電流密度は y に依存せず一様であるとする．このとき，2 つの導体板間には一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が形成される．

(1-3) 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の向き及び大きさを求めよ．

(1-4) 次に，電流 I を時間変化させる．このときに，長さ Δx あたりの誘導起電力を答えよ．また，平行導体板の長さ Δx あたりの自己インダクタンスを答えよ．ただし，変位電流は無視してよい．

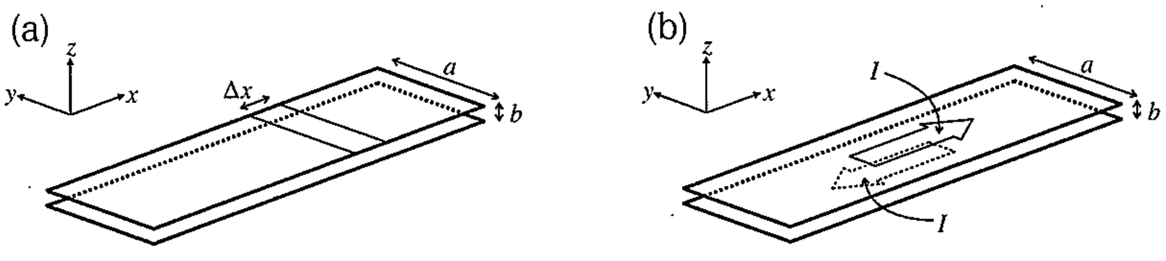

図 1

問 2 図 1 の平行導体板の電気的特性を表現するための等価回路である LC 回路網を考える (図 2). すべてのコンデンサーとコイルは，それぞれ同じ値の静電容量 C と自己インダクタンス L を持つものとする．図 2 のように，q_n は n 番目のコンデンサーの電気量，V_n は対応する場所における電位，I_n は対応する閉回路を流れる電流である．

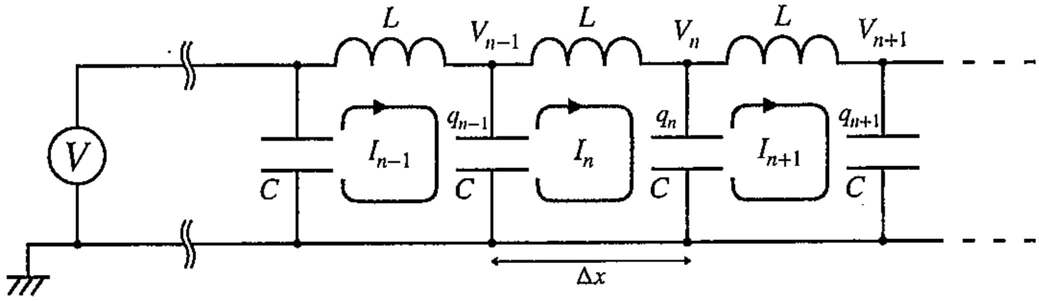

図 2

(2-1) V_n と q_n の関係を答えよ．また，電荷保存に基づいて I_n, I_{n+1} と $\dfrac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t}$ の関係を答えよ．

(2-2) 電位のつりあいから，V_n, V_{n-1} と $\dfrac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t}$ の関係を答えよ．

(2-3) (2-1), (2-2) で得た方程式から，電流に対する次の方程式を導け：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 I_n}{\mathrm{d}t^2} = I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1} \tag{1}$$

(2-4) 式 (1) の解の形を $I_n(t) = e^{-i\omega t}A^n I_0$ （ω は角振動数，I_0 は定数，i は虚数単位）と仮定する．$LC\omega^2 < 1$ の場合，A を求めよ．

(2-5) $LC\omega^2 \ll 1$ の場合，$A \approx e^{\pm i\sqrt{LC}\,\omega}$ と近似できる．この A を用いると，空間座標 $x_n = n\,\Delta x$ （Δx は 1 つの閉回路あたりの長さ）を導入することで，$I_n(t)$ は，角振動数 ω，波数 k の進行波の形を持つ：

$$I_n(t) = I_0\,e^{-i\omega t \pm ikx_n}, \qquad k \text{ は定数}$$

この波の波数 k 及び位相速度 v_p を L, C, Δx, ω のうち必要なものを用いて表せ．

(2-6) (1-2) と (1-4) で求めた平行導体板の長さ Δx あたりの静電容量と自己インダクタンスの表式を用いて，波の位相速度 v_p を与えよ．また，その値を有効数字 2 桁で答えよ．

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０２３年8月２３日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は青、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

体積Vの金属中の電子を，質量m，スピン$\frac{1}{2}$，温度Tの理想フェルミ気体として扱う．電子の数密度nを$n=\frac{N}{V}$（ただし，Nは電子数の期待値である）とし，化学ポテンシャルをμとする．また，ボルツマン定数をk_Bとし，$\beta=\frac{1}{k_BT}$と表記する．以下の問いに答えなさい．

問1．1電子のエネルギー準位が，$\varepsilon_i\,(i=0,1,2,3,\cdots)$と表記される場合，系の大分配関数$\Xi$は各エネルギー準位ごとの大分配関数$\Xi_i$の積の形で，$\Xi=\prod_{i=0}^{\infty}\Xi_i$と表記できる．$\Xi_i$をその準位のエネルギー$\varepsilon_i$を用いて書きなさい．

問2．エネルギー準位ε_iを占有する電子数の平均値$\langle N_i\rangle$を求めなさい．

以降，絶対零度（$T=0$ K）の場合を考える．

問3．フェルミ波数k_FとNとの関係を求めなさい．

問4．系の運動エネルギーE_{kin}を求めると，

$$E_{kin}=\frac{\hbar^2}{2m}[\,①\,](k_F)^{[②]}$$

の形になる．ここで，$\hbar$はプランク定数hを2πで割ったものであり，[②]はk_Fのべき乗の指数である．[①]，[②]にあてはまる適切な数値または表式を求めなさい．

次に，電子間の相互作用を考慮し，上向きスピンと下向きスピンの電子数をそれぞれ $N_\uparrow$, $N_\downarrow$とする．このとき，電子間相互作用のエネルギーE_{int}は$E_{int}=\frac{\alpha N_\uparrow N_\downarrow}{V}$で近似的に表される．$\alpha$は正の定数である．上向きと下向きスピンの電子数密度は，それぞれ$n_\uparrow=\frac{N_\uparrow}{V}=\frac{n}{2}+\Delta$, $n_\downarrow=\frac{N_\downarrow}{V}=\frac{n}{2}-\Delta$であるとする．次の問いに答えなさい．

問5． 磁化Mを，$n_\uparrow$, $n_\downarrow$および，ボーア磁子μ_Bを用いて書きなさい．

問6．上向きスピンの電子のフェルミ波数を$k_{F\uparrow}$とする．$n_\uparrow$を用いて$k_{F\uparrow}$を表しなさい．

問7. 電子間相互作用を入れると，系の運動エネルギーは E_{kin} から E'_{kin} へと変化する．E'_{kin} を Δ に関する4次の項までで計算すると，以下の式で表される．

$$E'_{kin} \cong E_{kin} + \frac{\hbar^2}{2m}[\ ③\ ]\Delta^{[④]} + C\Delta^4$$

ここで，Cは正の定数である．[③]，[④]に入る適切な数値または表式を求めなさい．

問8. 絶対零度において自発磁化が生じるかどうかは α の大きさに依存する．系全体のエネルギー E_{total} は E'_{kin} と E_{int} の和になることを考慮し，自発磁化が生じる α の臨界値 α_c を求めなさい．

問9. 縦軸を E_{total}，横軸を Δ にとったグラフの概形を $\alpha > \alpha_c$ および $\alpha < \alpha_c$ のそれぞれの条件に関して描きなさい．ただし，α_c は自発磁化が生じる α の臨界値である．また，自発磁化が生じた時の Δ の位置をグラフ中に矢印で示しなさい．

物理学 [IV] (答案用紙：緑)

エネルギー E, 質量 m の粒子の 1 次元運動を量子力学で考える。1 次元の座標を x とし, ポテンシャルは

$$V(x) = -V_0\delta(x) \tag{1}$$

で与えられるとする。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数であり, 定数 V_0 は正の実数（$V_0 > 0$）とする。ハミルトニアン H は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{2}$$

で与えられる。ここで $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ で h はプランク定数である。図 1 のように $x < 0$ の領域を領域 I と呼び, $x > 0$ の領域を領域 II と呼ぶことにする。

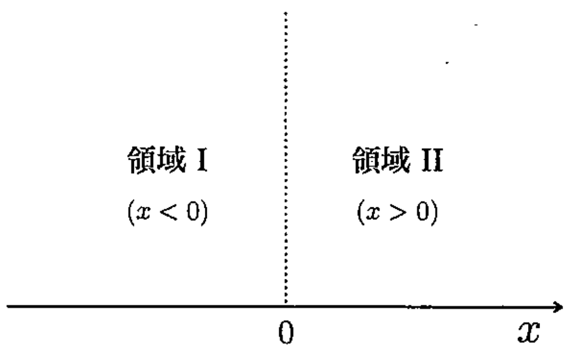

図 1

（次ページにつづく）

以下の問に答えよ。

問 1. $E > 0$ のときの粒子の運動を考える。

問 1-1 次の文を読み以下の問 (a)〜(c) に答えよ。

領域 I における波動関数 $u_{\mathrm{I}}(x)$ は, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式の一般解として

$$\boxed{\quad ア \quad} \tag{3}$$

で表される。ここで i は虚数単位, A_{I} と B_{I} は複素定数であり, 正の実数 α は $\alpha = \boxed{イ}$ である。

領域 II における波動関数 $u_{\mathrm{II}}(x)$ は, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式の一般解として

$$\boxed{\quad ウ \quad} \tag{4}$$

で表される。ここで A_{II} と B_{II} は複素定数であり, 正の実数 α は $\boxed{イ}$ で与えられる。

(a) 式 (3) の $\boxed{ア}$ にあてはまる式として, 適切なものを下記の [1] と [2] から選べ。

$$[1]\ u_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}}e^{i\alpha x} + B_{\mathrm{I}}e^{-i\alpha x}$$
$$[2]\ u_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}}e^{\alpha x} + B_{\mathrm{I}}e^{-\alpha x}$$

(b) 空欄 $\boxed{イ}$ にあてはまる表式を E, m, $\hbar$ を使って表せ。

(c) 式 (4) の $\boxed{ウ}$ にあてはまる式として, 適切なものを下記の [1] と [2] から選べ。

$$[1]\ u_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}}e^{i\alpha x} + B_{\mathrm{II}}e^{-i\alpha x}$$
$$[2]\ u_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}}e^{\alpha x} + B_{\mathrm{II}}e^{-\alpha x}$$

問 1-2 $x = 0$ での波動関数の接続条件を考える。領域 I と領域 II で求めたそれぞれの波動関数 $u_{\mathrm{I}}(x)$ と $u_{\mathrm{II}}(x)$ は $x = 0$ で連続であり,

$$u_{\mathrm{I}}(x = -\epsilon) = u_{\mathrm{II}}(x = +\epsilon) = u(0) \tag{5}$$

が成り立つ。ここで ϵ は正の無限小量であり, $x = 0$ での波動関数を $u(0)$ とした。また $x = 0$ での波動関数の 1 階微分は不連続となり,

$$\left.\frac{du_{\mathrm{II}}(x)}{dx}\right|_{x=+\epsilon} - \left.\frac{du_{\mathrm{I}}(x)}{dx}\right|_{x=-\epsilon} = -\lambda u(0) \tag{6}$$

が成り立つ。ここで $\lambda = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$ である。この式 (6) を, 式 (2) のハミルトニアン H を用いたシュレーディンガー方程式から導け。

問 1-3 領域 I と領域 II で, x の正方向への確率の流れの密度をそれぞれ

$$j_{\mathrm{I}}(x) = \frac{\hbar}{2im}\left[u_{\mathrm{I}}^{*}(x)\frac{du_{\mathrm{I}}(x)}{dx} - \frac{du_{\mathrm{I}}^{*}(x)}{dx}u_{\mathrm{I}}(x)\right], \quad j_{\mathrm{II}}(x) = \frac{\hbar}{2im}\left[u_{\mathrm{II}}^{*}(x)\frac{du_{\mathrm{II}}(x)}{dx} - \frac{du_{\mathrm{II}}^{*}(x)}{dx}u_{\mathrm{II}}(x)\right]$$

で与える。ここで $u_{\mathrm{I}}^{*}(x)$, $u_{\mathrm{II}}^{*}(x)$ はそれぞれ $u_{\mathrm{I}}(x)$, $u_{\mathrm{II}}(x)$ の複素共役を表す。式 (3), (4) の複素定数 A_{I}, A_{II}, B_{I}, B_{II}, および $v = \frac{\hbar\alpha}{m}$ の中から適切なものを使って, 領域 I および領域 II の確率の流れの密度 $j_{\mathrm{I}}(x)$, $j_{\mathrm{II}}(x)$ を表せ。

問 1-4 図 2 のように領域 II から x の負の方向に向かって粒子が入射する場合を考える。ただし, 領域 I から x の正の方向に向かって入射する粒子はない。この状態を表すために必要な条件は $\boxed{\text{エ}}$ である。

空欄 $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる式として適切なものを下記の [1] から [4] の中から 1 つ選べ。

[1] $A_{\mathrm{I}} = 0$, [2] $B_{\mathrm{I}} = 0$, [3] $A_{\mathrm{II}} = 0$, [4] $B_{\mathrm{II}} = 0$

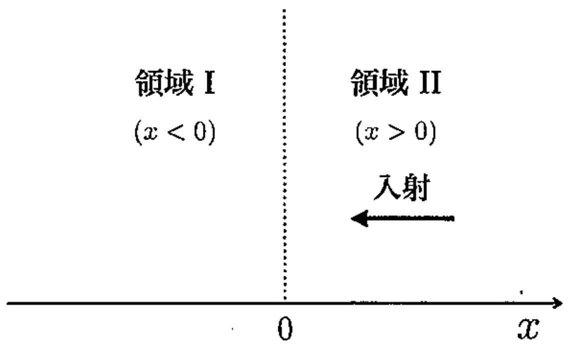

図 2

問 1-5 問 1-2 の式 (5) と (6), および問 1-4 で求めた条件を考慮して, 透過率と反射率を α と λ を使って表せ。

(次ページにつづく)

問 2. 次に $E<0$ のときの粒子の状態を考える。

問 2-1 次の文を読み以下の問 (a)〜(c) に答えよ。

$x \to -\infty$ で時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解は発散しないことを考慮すると，領域 I における波動関数 $u_{\mathrm{I}}(x)$ は，時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解として

$$\boxed{\quad オ \quad} \tag{7}$$

で与えられる。ここで C_{I} は複素定数であり，正の実数 β は $\beta = \boxed{カ}$ である。
また $x \to +\infty$ で時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解は発散しないことを考慮すると，領域 II における波動関数 $u_{\mathrm{II}}(x)$ は，時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解として

$$\boxed{\quad キ \quad} \tag{8}$$

で与えられる。ここで C_{II} は複素定数であり，正の実数 β は $\boxed{カ}$ で与えられる。

(a) 式 (7) の $\boxed{オ}$ にあてはまる式として，適切なものを下記の [1] から [4] の中から 1 つ選べ。

[1] $u_{\mathrm{I}}(x) = C_{\mathrm{I}}e^{i\beta x}$, [2] $u_{\mathrm{I}}(x) = C_{\mathrm{I}}e^{-i\beta x}$, [3] $u_{\mathrm{I}}(x) = C_{\mathrm{I}}e^{\beta x}$, [4] $u_{\mathrm{I}}(x) = C_{\mathrm{I}}e^{-\beta x}$

(b) 空欄 $\boxed{カ}$ にあてはまる表式を E, m, $\hbar$ を使って表せ。

(c) 式 (8) の $\boxed{キ}$ にあてはまる式として，適切なものを下記の [1] から [4] の中から 1 つ選べ。

[1] $u_{\mathrm{II}}(x) = C_{\mathrm{II}}e^{i\beta x}$, [2] $u_{\mathrm{II}}(x) = C_{\mathrm{II}}e^{-i\beta x}$, [3] $u_{\mathrm{II}}(x) = C_{\mathrm{II}}e^{\beta x}$, [4] $u_{\mathrm{II}}(x) = C_{\mathrm{II}}e^{-\beta x}$

問 2-2 $E<0$ のときでも $x=0$ での波動関数の接続条件として式 (5) と (6) が成り立つ。その接続条件を使ってエネルギー E を V_0, $\hbar$, m を使って表せ。

問 2-3 問 2-2 のエネルギー E に対応する波動関数の絶対値の 2 乗の概形を x の関数として描け。