大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【Ⅰ】【Ⅱ】

２０２２年8月２４日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は黄、赤を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

図１の通り、滑車に吊るされた２つの質点（質点１、質点２）を考える。２つの質点の質量はそれぞれ m_1、m_2 $(m_1 > m_2)$ である。鉛直下向きを x 軸にとり、その原点 O を滑車の位置とし、それぞれの質点の座標を x_1、x_2 とする。２つの質点を繋ぐ糸の長さは l $(= x_1 + x_2)$ である。以下の問いに答えよ。なお、全ての問題を通して、重力加速度を g とおき、滑車の大きさや摩擦は無視せよ。また、糸の重さは無視でき、糸は伸び縮みしない。糸の長さは十分に長く、２つの質点が滑車にぶつかることはないとする。

(1) 張力を T とおき、質点１、質点２の運動方程式を与えよ。

(2) 質点１の加速度と張力を導け。

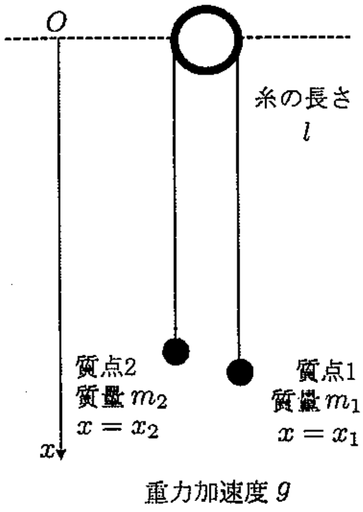


図１

次に、図２の通り、２つの質点を繋いでいた糸を切り、間をバネ（バネ定数 k）で繋いだ。バネの質量は無視でき、糸の長さとバネの自然長の和は l である。時刻 $t = 0$ で質点１および質点２を $x_1 = x_2 = l/2$ の場所に持っていき静かに離した。以下の問いに答えよ。

(3) 質点１および質点２の運動を記述するラグランジアン L を与えよ。

(4) 質点１、質点２の運動方程式をラグランジアン L から導け。導出の概要も記載すること。

(5) バネと糸を合わせた長さを x $(= x_1 + x_2)$ とし、時刻 t の関数として x を求めよ。

(6) 新たな座標 y を $y = (m_1 x_1 - m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$ と定義する。時刻 t の関数として y を求めよ。

(7) x、y の共役運動量を x、y の時間微分で与えよ。

(8) x、y およびその時間微分の関数であるラグランジアン L をルジャンドル変換することでハミルトニアン H を導け。導出の概要を記載すること。

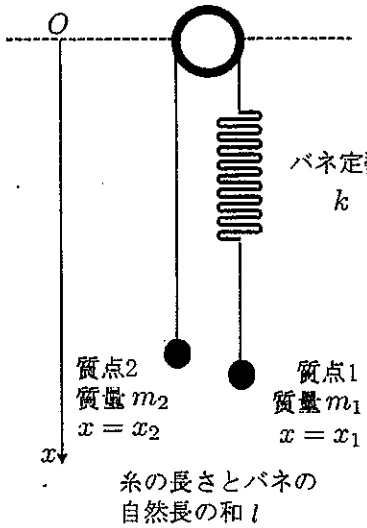


図２

次に、図3の通り、質点1、質点2を等しい質量の質点に置き換える ($m_1 = m_2 = m$)。さらに質点2には x 軸に沿って次の力を加える。

$$F = a\sin(\omega_0 t)$$

時刻 $t = 0$ で質点1および質点2は $x_1 = x_2 = l/2$ の場所で静止していたする。バネと糸を合わせた長さ $x\ (= x_1 + x_2)$ は振動を始めるが、適当な ω_0 にとった場合、振幅が時間に比例して大きくなっていった。この時、以下の問いに答えよ。

(9) ω_0 の値を k、m、l、a で与えよ。

(10) 振幅が時間に比例して大きくなっている時、単位時間あたりの振幅の増加率を k、m、l、a で与えよ。

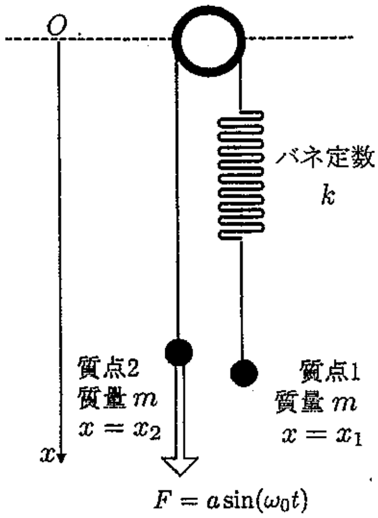


図3

真空中に電流が流れている場合を考える。位置 $\boldsymbol{r}$ の関数として電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が与えられた時、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は、クーロンゲージ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=0$ を採用すると、$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を満たし

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r'$$

と与えられる。ただし、μ_0 は真空の透磁率であり、積分領域 V は全電流を含むようにとる。

問 1. 磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{\nabla}$ を用いてどのように書けるか。

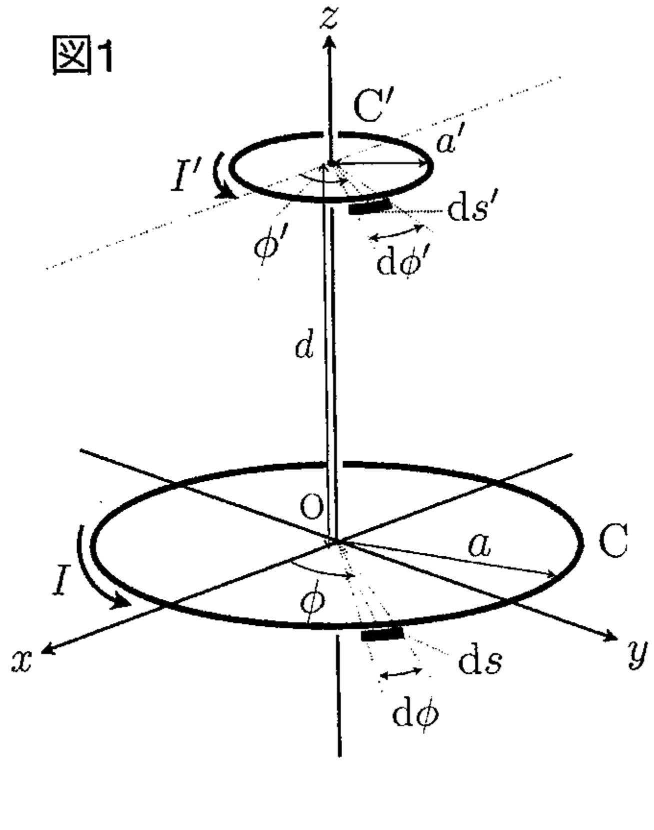
問 2. $\boldsymbol{r}$ に依存しないベクトル $\boldsymbol{K}$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\boldsymbol{K}}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)\times\boldsymbol{K}$$

が成り立つことを用いて、磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{r}$ および μ_0 を用いて表せ。ただし、$\boldsymbol{\nabla}$ による偏微分は実行した後の形で答えよ。

図 1 のように、座標軸を取る。原点を中心とする半径 a の xy 平面上の円を C として、C 上において x 軸と角 ϕ をなす位置にある長さ $\mathrm{d}s$ の微小円弧の中心角を $\mathrm{d}\phi$ とする。また、点 $(0,0,d)$ を中心とする半径 a' の円を C$'$ として、C$'$ 上において x 軸と角 ϕ' をなす位置にある長さ $\mathrm{d}s'$ の微小円弧の中心角を $\mathrm{d}\phi'$ とする。以下、$d\gg a'$ であるものとする。

図1



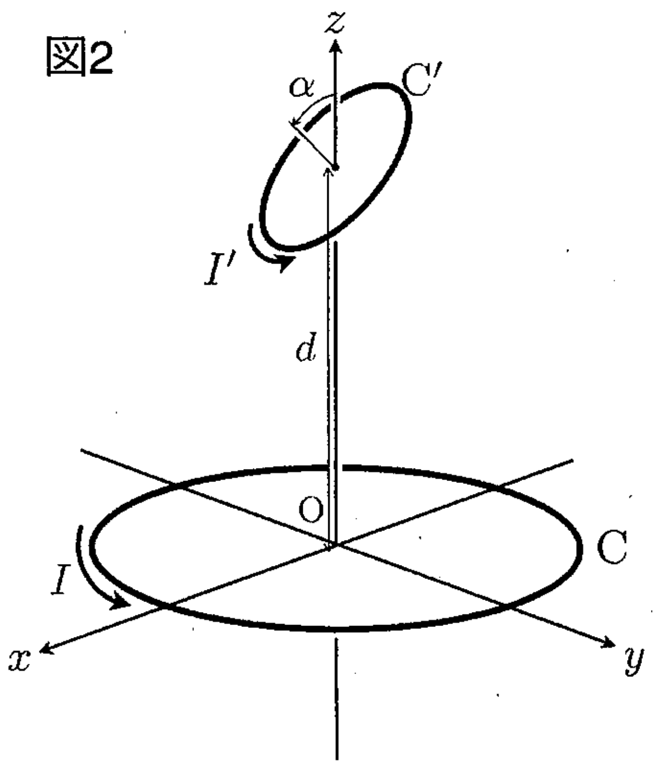
問 3. 円 C の周上に、図 1 で示した方向に定常電流 I を流した。円 C 上の微小円弧 $\mathrm{d}s$ を流れる電流素片 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3r$ の成分を a、ϕ、$\mathrm{d}\phi$、I を用いて表せ。

問 4. 円 C 上の定常電流 I が、原点 O に作る磁束密度の大きさと向きを答えよ。

問 5. 円 C 上の定常電流 I が、点 $(0, 0, z)$ に作る磁束密度の大きさと向きを求めよ。

問 6. 円 C′ を xy 平面に平行になるように静止させ、円 C′ の周上に定常電流 I' を流した。I' の向きは、C に流した電流と同じとする。円 C′ 上の微小円弧 $\mathrm{d}s'$ を流れる電流が受ける力の大きさと向きを答えよ。ただし、$d \gg a'$ より、円 C 上を流れる電流 I が作る磁束密度は C′ 付近で一様とみなしてよいものとする。

図2



問 7. 図 2 のように、円 C′ の法線ベクトルが xz 平面内にあって z 軸と角度 α をなすように円 C′ を傾けた。このとき、点 $(0, 0, d)$ のまわりに C′ に働く力のモーメントの大きさと向きを求めよ。ただし、$0 < \alpha < \pi/2$ とし、また、$d \gg a'$ より、円 C 上を流れる電流 I が作る磁束密度は C′ 付近で一様とみなしてよいものとする。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０２２年8月２４日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は青、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

1次元空間上を運動する質量 m の粒子を考える．そのラグランジアンは以下で与えられる．

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{e}{c}A(x(t),t)\,\dot{x}\ .$$

ここで，$x(t)$ は時刻 t における粒子の位置を表し，$\dot{x} = dx/dt$．e と c は定数である．A は $x(t)$ と t に依存する関数である．

粒子が半径 R の円周上に束縛されている場合を考える．以下では x の代わりに

$$x(t) = R\,q(t)\ ,$$

を用いる．q は円周上の角度を表す力学変数である．さらに A が以下の定数で与えられる場合を考える．

$$A = \frac{\hbar c}{eR}\frac{\theta}{2\pi}\ .$$

$\hbar = h/(2\pi)$ であり，h はプランク定数である．θ は定数である．

問1 この物理系のハミルトニアンが

$$H(q,p) = \frac{1}{2mR^2}\left(p - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2\ ,$$

で与えられることを示せ．ここで，p は q の正準共役運動量である．

問2 この物理系を量子力学的に取り扱う．波動関数を $\psi(q)$ としたとき，ψ が従う時間に依存しないシュレーディンガー方程式を求めよ．

問3 エネルギー固有関数は

$$\psi_n(q) = e^{inq}\ ,$$

で与えられる．簡単のため，規格化定数は考えない．粒子が円周上に束縛されていることから，n は整数でなければならないことを説明せよ．また，対応するエネルギー固有値 E_n を求めよ．

問4 $\theta = 0$ の場合を考える．基底状態および励起状態のエネルギー準位が縮退しているかどうか説明せよ．

問5 θ が 0 から π まで連続的に変化した時, 前問で求めた基底状態および第 1 励起状態のエネルギーはどのように変化するか. 横軸を θ, 縦軸をエネルギーに選び, 変化の様子を図示せよ.

問6 波動関数に対して以下で定義されるユニタリ変換を行う.

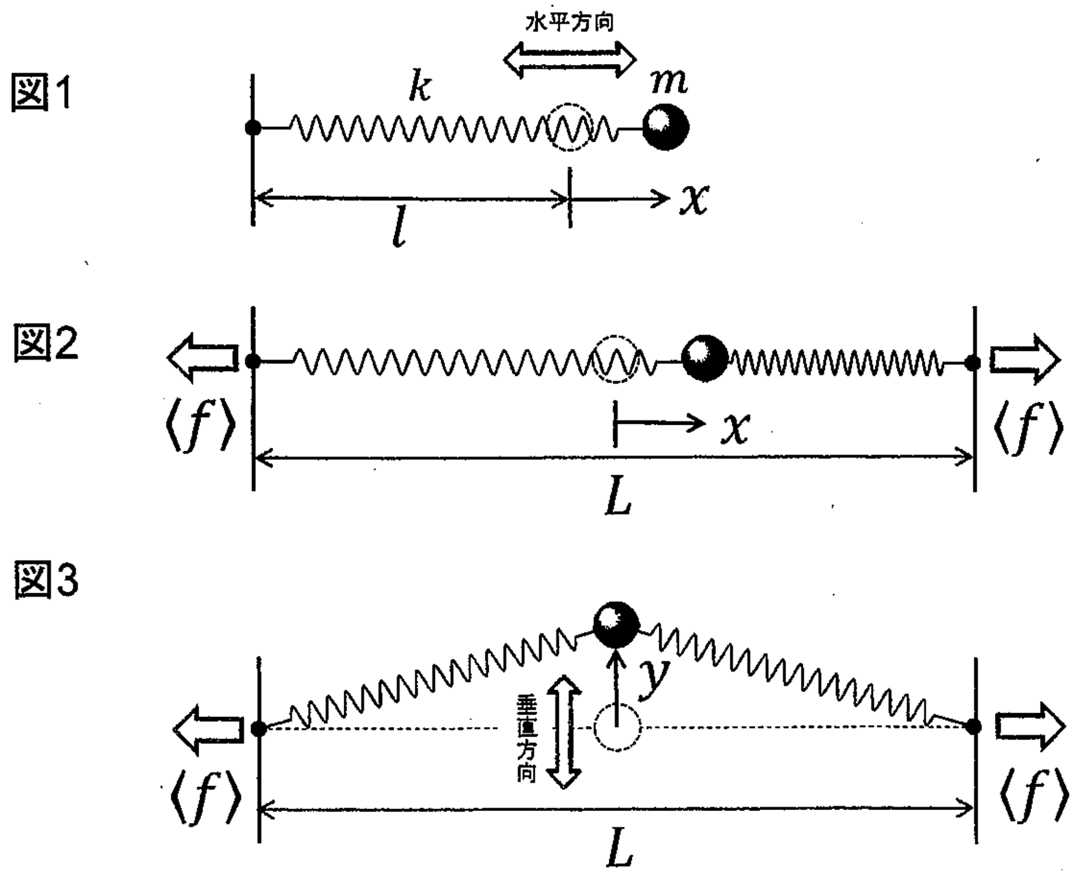
$$\hat{C} : \psi(q) \to \hat{C}\psi(q) = e^{iq}\,\psi(-q)\ .$$

ハミルトニアン演算子にユニタリ演算子 $\hat{C}$ が作用することで, パラメータ θ の変換が誘起される. その変換則を具体的に求めよ. さらに, $\hat{C}$ がハミルトニアン演算子と交換するための θ の条件を求めよ.

問7 $\hat{C}$ とハミルトニアン演算子が交換することに起因するエネルギー準位の特徴を述べよ.

バネにつながれた質点の熱運動を考える．質点の質量を m とする．バネ定数を k，バネの自然長を l とする．また，この質点系は温度 T の熱浴に接し，熱平衡状態にあるとする．この系が古典統計に従うとして，以下の設問に答えよ．ただし，ボルツマン定数を k_{B} とし，質点の大きさや重力，バネの質量は無視できるものとする．必要であれば，以下の積分公式を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$



まず，図1のように，1本のバネの片方を質点とつなぎ，もう片方を壁に固定する場合を考える．質点は，水平方向にのみ運動するものとする．質点の座標を x とし，つり合いの位置 (図1の点線の丸の位置) を座標の原点にとる．

問 1. 系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ を，質点の運動量 p，質点の座標 x，質点の質量 m，そして $\omega = \sqrt{k/m}$ を用いて書き下せ．

問 2. この系の分配関数

$$\frac{1}{h} \qquad Z = \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\ \exp\left[-\frac{\mathscr{H}}{k_{\mathrm{B}}T}\right]$$

と，ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

問 3. 問 2 の結果を用いて，内部エネルギー U と比熱 C を求めよ．

次に，図 2 のように，2 本の同一のバネを質点とつなげて，その両端を 2 つの壁に固定した．2 つの壁の間の距離を L $(L > 2l)$ とする．質点は，水平方向にのみ運動するものとする．質点の座標を x とし，つり合いの位置 (図 2 の点線の丸の位置) を座標の原点にとる．質点が原点にあるとき ($x = 0$ のとき)，それぞれのバネの自然長からの伸びは $a = L/2 - l$ である．

問 4. 系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ を，質点の運動量 p，質点の座標 x，質点の質量 m，バネの自然長からの伸び a，そして $\omega = \sqrt{k/m}$ を用いて書き下せ．

問 5. この系の分配関数 Z と，ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

問 6. 2 つの壁の間の距離を L に固定しているため，壁には力がかかっている．バネが壁におよぼす力の大きさを f とする．もし温度 $T = 0$ であれば，質点はつり合いの位置 ($x = 0$) にあるから，$f = ka$ と書ける．$T \neq 0$ である場合の，f の平均値 $\langle f \rangle$ を求めよ．

次に，図 3 のように，質点が垂直方向にのみ運動する場合を考える．質点の座標を y とし，つり合いの位置 (図 3 の点線の丸の位置) を座標の原点にとる．

問 7. $L > 2l$ とする．$|y/L| \ll 1$ として，系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ を y/L の最低次までの近似で書き下し，この系の分配関数 Z と，ヘルムホルツの自由エネルギー F，内部エネルギー U，比熱 C を求めよ．必要であれば，近似式 $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ $(|x| \ll 1)$ を用いてよい．

問 8. 問 7 の近似のもとで，バネが壁におよぼす力の大きさの平均値 $\langle f \rangle$ を求めよ．

次に，図 3 において，2 つの壁の間の距離を，2 本のバネの自然長と等しく $(L = 2l)$ した場合を考える．

問 9. $|y/L| \ll 1$ として，系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ を y/L の最低次までの近似で書き下し，内部エネルギー U と比熱 C を求めよ．