大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程

理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【I】【II】

２０２１年９月２４日（金）９時００分～１１時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【I】、物理学【II】の２題ある。答案用紙として問題別に指定されたpdfファイルを各自で白紙に印刷したものを用いること。同一問題に対する答案が２枚以上にわたる場合も、同じく印刷された答案用紙を用いること。

２．答案用紙は表面のみを用い、裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

図1のように，原子間の距離が ℓ の3個の原子からなる直線状の分子の X 軸方向と Y 軸方向の微小振動を考える。両端の原子の質量は m，中央の原子の質量は M とする。ここで重力加速度の影響は無視する。

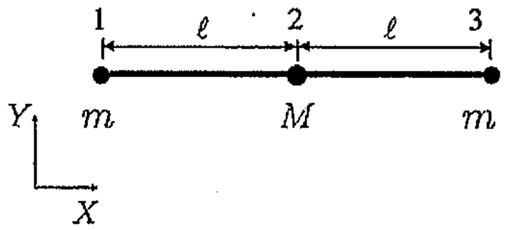


図1

まず分子の X 軸方向の運動を考える。図2のように，この運動を3つの原子が質量の無視できる自然長 ℓ，ばね定数 k_1 のばねでつながれている模型で記述する。

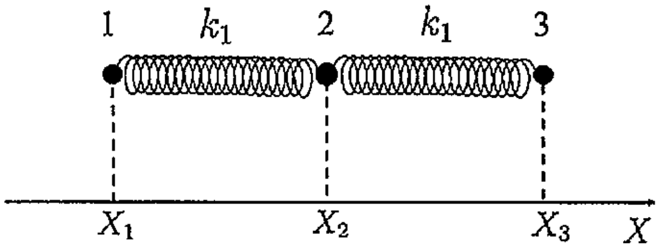


図2

問1　原子1，原子2，原子3の X 軸の位置を X_1, X_2, X_3 として分子の X 軸方向の運動のラグランジアンを求めよ。

問2　原子1，原子2，原子3についての運動方程式をそれぞれ求めよ。

問3　原子1，原子2，原子3の平衡からのずれを x_1, x_2, x_3 として前問の運動方程式を書き直せ。ここで x_1, x_2, x_3 はばねの自然長 ℓ よりも十分に小さく微小量として扱える。

問4　この分子が微小振動をする場合を考える。$x_1 = A_1e^{i\omega t}, x_2 = A_2e^{i\omega t}, x_3 = A_3e^{i\omega t}$ とおき，前問の運動方程式に代入することで，定数 A_1, A_2, A_3, ω が満たす関係式を求めよ。

問 5　前問の関係式で A_1, A_2, A_3 がゼロ以外の解を持つ条件を求めよ。また得られた条件から角振動数 ω を求めよ。

問 6　前問で得られた ω のうち, 並進運動に相当する ω の値を求めよ。

問 7　分子の X 軸方向の質量中心は動かないとする。つまり,

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0$$

が成り立つ。このとき, $x_+ = x_1 + x_3$, $x_- = x_1 - x_3$ とし, 問 1 のラグランジアンを x_+ と x_- で表せ。

問 8　座標 x_+ と x_- に対する基準振動の振動数を求めよ。

次に Y 軸方向の運動について考える。Y 軸方向の運動は分子の屈曲による振動で記述できる。図 3 のように, 原子 1, 原子 2, 原子 3 の Y 軸方向の平衡点からの変位を y_1, y_2, y_3 とすると, Y 軸方向の質量中心が動かない条件は

$$m(y_1 + y_3) + My_2 = 0$$

と書ける。y_1, y_2, y_3 は原子間の距離 ℓ よりも十分に小さく微小量として扱える。

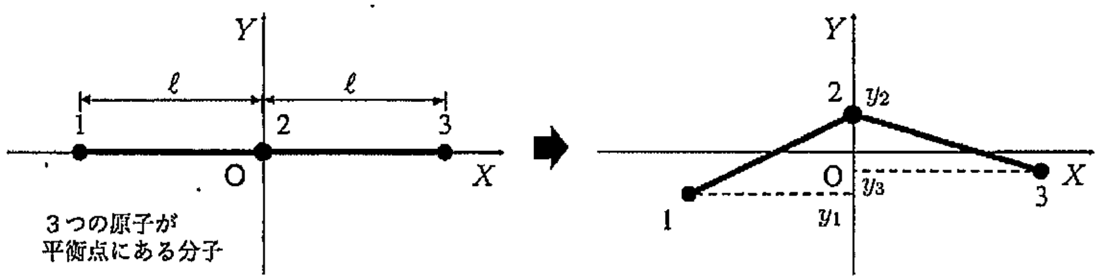


図 3

問 9　原子 2 の平衡位置に対する分子全体の角運動量を求めよ。ここで 2 次の微小量は無視できるとする。

問 10　$y_1 = y_3$ のとき, 前問で求めた角運動量の値を求めよ。

問 11　図 4 のように $y_1 = y_3$ とする。その時, 分子の屈曲のポテンシャルエネルギーは $\delta = \frac{1}{\ell}\{(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)\}$ を用いて $k_2\ell^2\delta^2/2$ と書けるとする。なお, k_2 は定数である。Y 軸方向の運動のラグランジアンを $y_1 = y_3$ の条件のもと, ℓ, δ を用いて表せ。

問 12　$y_1 = y_3$ の条件下で Y 軸方向の微小振動の振動数を求めよ。

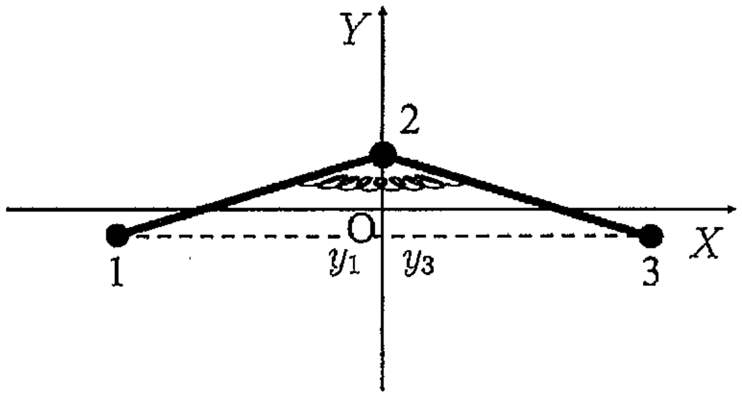


図4

問 1. 図 1 のように一様な導線に大きさ I の電流が流れている。導線上の点 Q にある電流素片 $Id\vec{s}$ が点 P に作る磁束密度 $d\vec{B}$ とベクトルポテンシャル $d\vec{A}$ を考える。

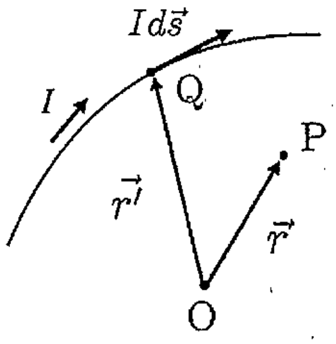


図 1: 導線に流れる電流

次の文の空欄 $\boxed{}$ について、以下の問いに答えよ。

原点を O とし、点 P、点 Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{r}=(x,y,z)$、$\vec{r'}=(x',y',z')$ とする。ビオ・サバールの法則より、点 Q の電流素片 $Id\vec{s}$ が点 P に作る磁束密度 $d\vec{B}$ は

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

となる。ここで、μ_0 は真空の透磁率である。この式に対し

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)=\boxed{\quad(1)\quad}$$

の関係式を使うと磁束密度 $d\vec{B}$ の表式は

$$d\vec{B}=\vec{\nabla}\times\boxed{\quad(2)\quad}$$

と書ける。ここで $\vec{\nabla}$ は点 P の座標 $\vec{r}=(x,y,z)$ での微分 $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を表す。一般に磁束密度 $\vec{B}$ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の関係は

$$\vec{B}=\boxed{\quad(3)\quad}$$

であることから、点 Q の電流素片 $Id\vec{s}$ が点 P に作るベクトルポテンシャル $d\vec{A}$ は

$$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

で与えられる。

(a) 空欄 (1) に、$\vec{r}$ と $\vec{r'}$ を使って適当な式を書け。

(b) 空欄 (2) に適当な式を書け。

(c) 空欄 (3) に、一般に成り立つ磁束密度 $\vec{B}$ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の関係を書け。

問 2. 図 2 のように xy 平面上のそれぞれの座標にある点 A、B、C、D を直線で結ぶ閉じた導線に、反時計回りに大きさ I のループ電流が流れている。このループ電流が遠く離れた点 P に作るベクトルポテンシャルおよび磁束密度を求めたい。以下の問いに答えよ。

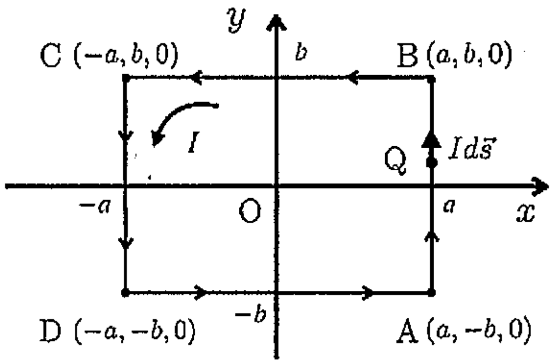


図 2: xy 平面上のループ電流

(a) 線分 AB 上の点 Q の位置ベクトルを $\vec{r'} = (a, s, 0)$, $(-b \le s \le b)$ で表す。遠くの点 P の位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ の大きさを r とすると、点 P は遠くにあることから $r \gg a, b, s$ として $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ は

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-s)^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2ax-2sy+a^2+s^2}} \simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{ax}{r^2}+\frac{sy}{r^2}\right)$$

と近似的に表される。この近似を使い、問 1 で与えられたベクトルポテンシャル $d\vec{A}$ の表式を積分することにより、線分 AB の導線に流れる電流によって作られる、点 P でのベクトルポテンシャル $\vec{A}_{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

(b) 前問と同様な近似を用いて、線分 BC、CD、DA の導線に流れる電流によって作られる、点 P でのベクトルポテンシャルを求めることにより、このループ電流全体によって作られるベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を求めよ。

(c) 磁気双極子モーメント $\vec{m}$ を原点に置いたとき、これが作るベクトルポテンシャルは

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

で与えられる。ここで、考えているループ電流による磁気双極子モーメント $\vec{m}$ を求めよ。

(d) 図 2 のループ電流によって遠くの点 P に作られる磁束密度 $\vec{B}$ を計算せよ。

問 3. 問 2 で考えたループ電流に、外部から次のようなベクトルポテンシャル

$$\vec{A}_{\mathrm{ext}}(x,y,z)=\left(\frac{zB\sin\theta-yB\cos\theta}{2},\ \frac{xB\cos\theta}{2},\ -\frac{xB\sin\theta}{2}\right)$$

を作用させた。ここで B は定数、θ は角度を表すパラメータである。以下の問いに答えよ。

(a) $\vec{A}_{\mathrm{ext}}$ によって生じる磁束密度 $\vec{B}_{\mathrm{ext}}$ を求めよ。

(b) 図 2 のループ電流の電流素片 $Id\vec{s}$ と外場 $\vec{A}_{\mathrm{ext}}$ の内積をループ電流に沿って一周積分した量

$$U=-\oint\vec{A}_{\mathrm{ext}}\cdot Id\vec{s}$$

を考える。これを計算し U を求めよ。

(c) ループ電流による磁気双極子モーメントベクトル $\vec{m}$ と外場 $\vec{B}_{\mathrm{ext}}$ を使って U を表せ。さらに、θ を変化させて $\vec{B}_{\mathrm{ext}}$ を変えたとき、U が最も小さくなる θ の値を求めよ。

(d) U は物理的にどのような量を表すか。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程

理学専攻 物理科学領域

物理学　問題【III】　【IV】

２０２１年9月２４日（金）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

1．この冊子には物理学【III】、物理学【IV】の２題ある。答案用紙として問題別に指定されたpdfファイルを各自で白紙に印刷したものを用いること。同一問題に対する答案が２枚以上にわたる場合も、同じく印刷された答案用紙を用いること。

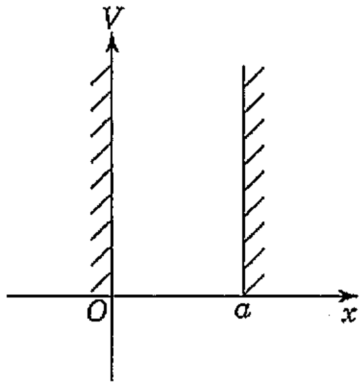
2．答案用紙は表面のみを用い、裏面には何も書き込んではならない。

3．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

問 1. 1次元の井戸型ポテンシャル内での質量 m の粒子の運動を量子力学で考える。下図のようにポテンシャルを

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ +\infty & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

とする。ただし、$a > 0$ とする。必要であれば、プランク定数 h、または $\hbar (\equiv \frac{h}{2\pi})$ を用いて、以下の問いに答えよ。



(a) 波動関数を $\psi(x)$、エネルギーを E として、時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。

(b) $E > 0$ の場合に、シュレディンガー方程式を解き、エネルギー固有値 E_n 及び対応する規格化された固有関数 $u_n(x)$ を求めよ。

(c) 基底状態の固有関数 $u_1(x)$、第1励起状態の固有関数 $u_2(x)$ の概形を図示せよ。

(d) エネルギー E_n の状態に対して、位置の測定をした場合の期待値を計算せよ。

(e) エネルギー E_n の状態に対して、運動量の測定をした場合の期待値を計算せよ。

次に、時間発展を考える。

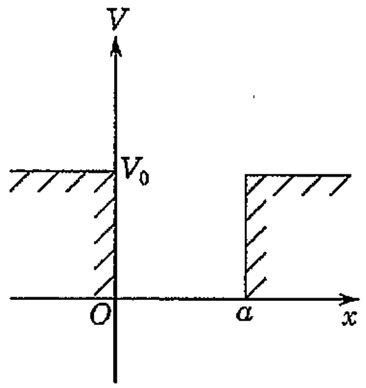
(f) 初期状態（$t = 0$）が $u_n(x)$ の時、時間に依存するシュレディンガー方程式の解 $\phi_n(x, t)$ を求めよ。

(g) 初期状態が $u_1(x)$ と $u_2(x)$ を重ね合わせた状態 $\phi(x, t = 0) \propto (u_1(x) + u_2(x))$ であった場合を考える。時刻 t において位置の測定をした場合の期待値 $\langle x \rangle$ とエネルギーの期待値 $\langle H \rangle$ を求めよ。

問 2. 次に、ポテンシャル障壁が有限である場合を考える。下図のようにポテンシャルを

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ V_0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

とする。ただし、$a > 0$, $V_0 > 0$ とする。エネルギー E が $0 < E < V_0$ の場合について、時間に依存しないシュレディンガー方程式を考え、以下の問いに答えよ。



(a) $0 < x < a$ の範囲の一般解 $\psi(x)$ を E を用いて書け。

(b) 問 (a) 以外の範囲の一般解 $\psi(x)$ を E を用いて書け。

(c) 上の一般解が、境界 $(x = 0, a, \pm\infty)$ で満たす条件を示せ。

(d) 第 1 励起状態が存在するとして、基底状態、第 1 励起状態の波動関数の概形を図示せよ。

体積がVの箱の中に、N個の単原子分子の粒子からなる理想気体が入っており、温度Tの熱浴と熱平衡状態にある。以下の問いに答えよ。ボルツマン定数をk_Bとし、必要であれば、以下の公式を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

1. 粒子の質量をm、i番目の粒子の運動量ベクトルをp_iとしたとき、箱の中の理想気体のハミルトニアンHを求めよ。

2. 分配関数Z_Nは、以下の式で与えられる。ここで、CおよびA、Bは定数である。

$$Z_N \sim \frac{1}{N!}\left(CV^A T^B\right)$$

   AおよびBを求めよ。

3. 箱の中の理想気体の圧力P_Nを求めよ。

つぎに、この理想気体が熱・粒子浴と熱および粒子をやり取りして平衡状態にある場合を考える。このとき、理想気体の温度をT、化学ポテンシャルをμとして、理想気体の大分配関数Ξは、分配関数Z_Nを用いて以下の式で与えられる。

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N \exp\left(\frac{\mu N}{k_B T}\right) = \exp\left\{CVT^{3/2}\exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)\right\}$$

4. このときの箱の中の理想気体の圧力Pを求めよ。

問1～3で考えた理想気体(粒子数N、温度T)が入った箱の中に、表面に粒子の吸着点をM個有する吸着物質を置いた場合を考える。粒子が吸着していないときの吸着点のエネルギーをゼロとし、それぞれの吸着点に1個の粒子が吸着すると、吸着点のエネルギーが$-\varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$)だけ変化する。1つの吸着点に2個以上の粒子が吸着することはなく、粒子間の相互作用は無視できるとして、以下の問いに答えよ。ただし、吸着物質の大きさは箱に比べて十分に小さく、また吸着点の個数Mは理想気体に含まれる粒子数に比べで十分に小さいとし、吸着物質が理想気体に及ぼす影響は無視できるとする。

5. 吸着点一つの大分配関数Ξ_1を求めよ。

6. 吸着物質全体の大分配関数Ξ_Mを求めよ。

7. 一つの吸着点当たりのエネルギーの平均$\langle E \rangle$を求めよ。

8. 表面に吸着している粒子の総数の平均 $\langle n \rangle$ を求めよ。

9. 全吸着点のうちの半分に粒子が吸着しているときの気体の圧力 $P_{\frac{1}{2}}$ を求めよ。また、全吸着点のうちで粒子が吸着している割合を、圧力 P を横軸として図示せよ ($P > 0$)。