大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ｉ】【Ⅱ】

２０１８年8月２２日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ｉ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

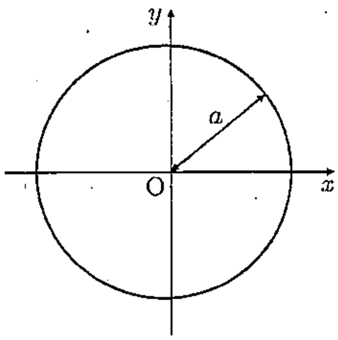
２．答案用紙は黄、赤を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学 [I] (答案用紙：黄)

半径 a の円盤が、鉛直に立てて固定してある。この円盤を含む面を xy 平面に取り、円盤の中心を原点と定める。重力は y 軸の負の方向に働くものとし、重力加速度を g とおく。xy 平面内を質量 m の質点が運動する場合を考える。質点の座標を (x, y) とおく。

なお、本問題では、xy 平面内における運動のみを考えれば良いものとし、摩擦力は無視できるものとする。また、ある変数 A の時間微分を $\dot{A}$ のように表してよいものとする。



問 1. まず、問 2 を解く準備として、質点が $x^2 + y^2 > a^2$ の範囲にある場合を考える。

(a) 質点が持つポテンシャルエネルギーを書け。ただし、そのポテンシャルエネルギーは $y = 0$ において 0 であるものとせよ。

(b) 質点が持つ全エネルギーを書け。

(c) 質点の運動を記述するラグランジアンを書け。

問 2. 次に、質点が円盤の頂上 $(0, a)$ から円盤の外周に沿ってゆっくり運動を始める場合を考える。一般に、積分 $I = \int F(u(t), t)\mathrm{d}t$ の極値を与える $u(t)$ を求める時、$f(u(t), t) = 0$ という拘束条件が課せられている場合には、$I = \int [F(u(t), t) + \lambda f(u(t), t)]\,\mathrm{d}t$ の極値を求めれば良い。これをラグランジュの未定乗数法と呼ぶ。本問では、運動の拘束のない場合のラグランジアンを $F(u(t), t)$ にあてはめ、円盤が存在することによって生じる運動の拘束条件として $f(u(t), t)$ に $x^2 + y^2 - a^2$ をあてはめるものとする。

(a) ラグランジュ未定乗数 λ を用いたラグランジアンを書け。またそのラグランジアンに対するオイラー・ラグランジュの運動方程式を書け。

(b) 全エネルギーが保存していることを示せ。

(c) 運動方程式と拘束条件より次式を導け。

$$-m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = 2\lambda a^2$$

(d) λ を m、g、a および y を用いて表せ。

(e) 質点はやがて円盤の外周を離れて、拘束条件は満たされなくなる。円盤の外周を離れる瞬間に、λ が満たす条件を答えよ。

(f) 質点が円盤の外周を離れる点の座標を求めよ。

物理学 [II] (答案用紙：赤)

問 1 および問 2 に答えよ．ただし，問題を通して (r, ϕ, z) は円柱座標系を表す．また，マクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \tag{4}$$

とする．ここで，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, ρ, $\boldsymbol{J}$, ε_0, μ_0 は，それぞれ電場，磁場 (磁束密度)，電荷密度，電流密度，真空の誘電率，真空の透磁率である．また，必要があれば，任意のスカラー f，任意のベクトル $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ に関するベクトル公式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{Y}) \tag{5}$$

及び，円柱座標 (r, ϕ, z) における公式

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{e}_z \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{X} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r X_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{X} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial X_z}{\partial \phi} - \frac{\partial X_\phi}{\partial z} \right) \boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial X_r}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial r} \right) \boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r X_\phi) - \frac{\partial X_r}{\partial \phi} \right) \boldsymbol{e}_z \tag{8}$$

を用いてよい．ここで，$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\phi$, $\boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ r, ϕ, z 方向の単位ベクトルである．

問 1　図 1(a) のように z 軸を中心軸とする半径 a の無限に長い一様な導体円柱がある．この導体の電気抵抗率は一様とする．導体円柱の外部は真空であるとし，内部を含む全空間に $+z$ 方向の静電場 E_0 が一様かつ定常的にかけられているとする．一方，導体円柱は帯電しておらず，その内部には $+z$ 方向に一様な密度で電流が流れているとし，全電流を I とおく (微視的には，この導体円柱は，z 軸に沿って直線状に置かれた無数の細い導体線の集合体からなるものと考える)．さらに，中心軸からの距離を r とし，導体円柱を含むすべての領域において透磁率は真空の透磁率 μ_0 に等しいとする．

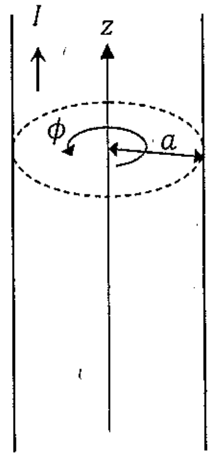


図 1(a)

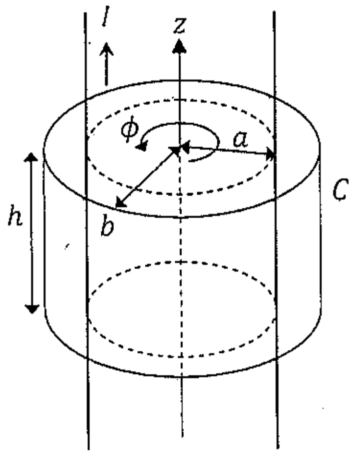


図 1(b)

(1-1)　導体円柱の内部および外部に作られる磁場 B をそれぞれ求めよ．

(1-2)　導体円柱の内部と外部における磁場 B のベクトルポテンシャル A をそれぞれ求めよ．ただし，同じ B を与える任意のゲージを用いて良いものとする．

(1-3)　次に，z 軸を中心軸とする円柱領域 C を考えよう．この円柱領域の半径を b，高さを h とする．ここでは，円柱領域 C の半径 b が a より大きな場合 ($b > a$) を考える (図 1(b) 参照)．ポインティング・ベクトルの法線成分を境界面上で面積分して得られる値をポインティング・フラックスと呼ぶ．円柱領域 C の境界面におけるポインティング・フラックス F を求めよ．ただし，ポインティング・ベクトルの法線成分の符号は，円柱領域 C の内部から外部に向かう向きを正とする．

(1-4)　前問 (1-3) において円柱領域 C の半径 b が a より小さな場合 ($b < a$) を考える．前問と同様に，円柱領域 C の境界面におけるポインティング・フラックス F を求めよ．

(1-5)　ポインティング・フラックス F の物理的意味を考え，F の b 依存性が問 (1-3) と問 (1-4) のようになる理由について概略を説明せよ．

物理学 [II] (答案用紙：赤)

問 2　時間変動する電場と磁場について，以下の設問に答えよ．ただし，考える領域内で電流密度 $J = 0$ とする．

(2-1)　マクスウェル方程式から，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dt}\int_C \left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)dV = -F \tag{9}$$

ただし，ここで左辺の積分は曲面で囲まれた領域 C の内部で行う体積積分であり，右辺の F はポインティング・ベクトルの法線成分を領域 C の境界面上で面積分して得られるポインティング・フラックスである．ただし，ポインティング・ベクトルの法線成分の符号は，領域 C の内部から外部に向かう向きを正とする．

(2-2)　角周波数 ω で振動する電場と磁場が与えられている場合を考える．ただし，電場は z 成分，磁場は ϕ 成分のみを持ち，どちらも z 軸に対して並進及び回転対称であり，ともに r にのみ依存する (図 2 参照)．すなわち，以下のように書けるとする．

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\left[\tilde{E}(r)e^{i\omega t}\right]\boldsymbol{e}_z\,, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{Re}\left[\tilde{B}(r)e^{i\omega t}\right]\boldsymbol{e}_\phi \tag{10}$$

ここで，$\tilde{E}(r)$ と $\tilde{B}(r)$ はそれぞれ電場と磁場の複素振幅であり，Re は実部を意味する．ただし，$\tilde{E}(r)$ と $\tilde{B}(r)$ は，$r = 0$ で発散しないものとする．このとき，$\tilde{E}(r)$ と $\tilde{B}(r)$ が満たす以下の方程式を導き，$\boxed{(a)}$-$\boxed{(d)}$ に入る式をそれぞれ答えよ．

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dr^2} + \boxed{(a)}\frac{d\tilde{E}}{dr} + \boxed{(b)}\tilde{E} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d^2\tilde{B}}{dr^2} + \boxed{(c)}\frac{d\tilde{B}}{dr} + \boxed{(d)}\tilde{B} = 0 \tag{12}$$

(2-3)　前問 (2-2) の場合において，$\tilde{E}(r)$ と $\tilde{B}(r)$ をベッセル関数 $J_\nu(\xi)$（ここで ν は整数）を用いて記述せよ．なお，ベッセル関数 $J_\nu(\xi)$ は以下の微分方程式を満たす．

$$\frac{d^2J_\nu}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dJ_\nu}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)J_\nu = 0 \tag{13}$$

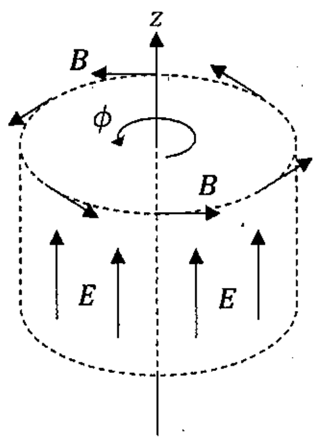


図 2

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士前期課程
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１８年8月２２日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は青、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学 [III] (答案用紙：青)

以下の問題を解け。ただし、量子力学の演算子 $\mathcal{O}$ のエルミート共役は $\mathcal{O}^\dagger$ で表され、h をプランク定数としたとき $\hbar$ は $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ で定義される。

問1 x 軸上を運動する質量 m の質点のハミルトニアンが次のように与えられているとする。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ここで p は x に共役な運動量であり、ω は正の定数である。このハミルトニアンで記述される量子力学を考える。

(a) a を以下のように定義する。

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x)$$

a と $a^\dagger$ の交換関係 $\left[a, a^\dagger\right]$ を記せ。途中計算も書くこと。

(b) x と p の代わりに a と $a^\dagger$ を使ってハミルトニアン H を表せ。この問題では途中計算を省略して答えのみを記してよい。

(c) ハミルトニアンの固有値を 0 以上の整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ を使って表せ。この問題では途中計算を省略して答えのみを記してよい。

問2 次に (x, y, z) という座標で表される空間中を運動する質点のハミルトニアンが次のように与えられているとする。

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

ここで p_x, p_y, p_z はそれぞれ x, y, z に共役な運動量であり、このハミルトニアンで記述される量子力学を考える。

(a) a_x, a_y, a_z を以下のように定義する。

$$a_x \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip_x + m\omega x), \quad a_y \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip_y + m\omega y), \quad a_z \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip_z + m\omega z)$$

x, y, z, p_x, p_y, p_z の代わりに a_x, a_y, a_z, $a_x^\dagger$, $a_y^\dagger$, $a_z^\dagger$ を使ってハミルトニアン H を表せ。この問題では途中計算を省略して答えのみを記してよい。

(b) ハミルトニアンの固有値 E は整数 N を使って $E = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ と書ける。基底状態の N を N_0 と表す。N_0 はいくつになるか答えのみ記せ。

物理学 [III] (答案用紙：青)

(c) ハミルトニアンの固有値 $E = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ が $N = N_0 + 1$ である状態の数（縮退度）と、$N = N_0 + 2$ である状態の数（縮退度）をそれぞれ記せ。この問題では途中計算を省略して答えのみを記してよい。

(d) 角運動量の z 成分 $L_z \equiv xp_y - yp_x$ が保存することを示せ。途中計算も書くこと。

(e) L_z を $a_x, a_y, a_z, a_x^\dagger, a_y^\dagger, a_z^\dagger$ を使って表せ。ただし、 $a_x, a_y, a_z, a_x^\dagger, a_y^\dagger, a_z^\dagger$ のすべてを使って表す必要はない。また、途中計算も書くこと。

(f) 角運動量の x 成分 L_x と y 成分 L_y を $a_x, a_y, a_z, a_x^\dagger, a_y^\dagger, a_z^\dagger$ を使って表せ。ただし、 $a_x, a_y, a_z, a_x^\dagger, a_y^\dagger, a_z^\dagger$ のすべてを使って表す必要はない。この問題では途中計算を省略して答えのみを記してよい。

(g) $a_\pm \equiv a_x \mp ia_y$ と定義する。$[L_z, a_+^\dagger]$ を求めよ。途中計算も書くこと。

(h) ハミルトニアンの固有値 $E = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ が $N = N_0 + 1$ である状態のうち、L_z の固有値が一番高い状態を、基底状態 $|0\rangle$ 及び $a_+^\dagger, a_-^\dagger, a_z^\dagger$ を使って表せ。ただし、 $a_+^\dagger, a_-^\dagger, a_z^\dagger$ のすべてを使って表す必要はなく、規格化の必要もない。

(i) 前問 (h) で求めた固有状態について、x 軸上 $(y = z = 0)$ での確率密度の概形を図示せよ。ただし、確率密度の値を縦軸に、x を横軸にせよ。また、z 軸上 $(x = y = 0)$ での確率密度の値についても z を横軸にして概形を図示せよ。x 軸上の概形と z 軸上の概形はそれぞれ別の図で表せ。

スピン1のIsingモデルのハミルトニアンは次の式で与えられるとする．

$$\mathscr{H} = -J\sum_{\langle i,j\rangle} S_i S_j - h\sum_i S_i$$

ここで，S_i はサイト i にあるIsingスピンであり，-1，0，1の3つの値をとるものとする．$\langle i,j\rangle$ は最近接サイトの対，J は交換相互作用定数，h は外場である．1つのサイトの最近接サイト数を z，全サイト数を N とする ($N \gg 1$)．また，この系は温度 T の熱浴に接し，熱平衡状態にあるとする．以下の問に答えよ．ただし，ボルツマン定数を k とし，必要なら次の公式を用いてもよい．

指数関数のテイラー展開: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$

まず，交換相互作用が無い ($J=0$) 場合を考える．

問1. この系（カノニカル分布）の分配関数

$$Z = \sum_{S_1}\sum_{S_2}\cdots\sum_{S_N}\exp\left[-\frac{\mathscr{H}}{kT}\right]$$

とヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

問2. この系の内部エネルギー U を求めよ．

問3. この系の全磁化 $M = -\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_T$ を求めよ．さらに，スピン1個あたりの磁化 $m = M/N$ の外場依存性をグラフで示せ．横軸を h，縦軸を m とし，$h \to \pm\infty$ での振る舞いに注意せよ．ただし，$T>0$ とする．

問4. この系のエントロピー S を求めよ．

次に，$J>0$ の場合を平均場理論 (分子場近似) で考える．平均場理論において，考えているサイト i のスピン以外のスピンは平均値 $m(=\langle S_j\rangle)$ で近似する．

問5. 平均場理論のハミルトニアンを求めよ．

問6. 平均場理論における分配関数 Z_{MF} を求めよ．

問 7. スピンの平均値 m はスピン 1 個あたりの磁化に等しい. m に対する自己無撞着方程式は $m = f(m)$ となる. ここで $f(m)$ が, 以下の式となることを示せ.

$$f(m) = \frac{2\sinh\left(\dfrac{Jzm+h}{kT}\right)}{2\cosh\left(\dfrac{Jzm+h}{kT}\right)+1}$$

問 8. $h = 0$ のとき, 強磁性相転移温度 T_c より低い温度で自発磁化 $m \neq 0$ が生じる. T_c は, $y = m$ と $y = f(m)$ のグラフが $m = 0$ で接する条件より求まる. T_c を求めよ.

問 9. $h = 0$ で, T が T_c 以下かつ T_c に十分近いとき, 自発磁化 m が, $m \propto \left(\dfrac{T_c - T}{T_c}\right)^{\beta}$ となることを示し, 指数 β の値を求めよ.