

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学 問題【Ⅰ】【Ⅱ】

2017年8月23日（水）9時20分～11時20分

受験上の注意

1. この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の2題ある。答えは問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が2枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。
2. 答案用紙は黄、赤を全員に各1枚、それに草案用紙を各1枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではいない。
3. 答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではいない。

物理学 [I] (答案用紙：黄)

ポテンシャル $U(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ によって導かれる中心力を受けて運動する質量 m の粒子を考える。粒子の位置ベクトルは \mathbf{r} , 速度ベクトルは $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ である。

- 問1 直交座標において粒子の位置 \mathbf{r} に対する運動方程式は $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U$ である。これを用いて粒子の角運動量 $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ の時間微分がゼロになることを示せ。
- 問2 球座標 (r, θ, ϕ) は直交座標と $(x, y, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$ の関係で結ばれる。球座標の変数ならびにそれらの時間微分を用いて粒子の速度の大きさの二乗 $|\mathbf{v}|^2$ を表せ。
- 問3 速度を r 方向とその垂直成分に分解し $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\perp \mathbf{e}_\perp$ と表す (図1)。ここで $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\perp$ は対応する方向の単位ベクトルである。 v_r, v_\perp を球座標の変数ならびにそれらの時間微分を用いて表せ。その結果を用いて、角運動量の大きさ $l \equiv |\mathbf{l}|$ を m, r, θ, ϕ ならびにそれらの時間微分を用いて表せ。

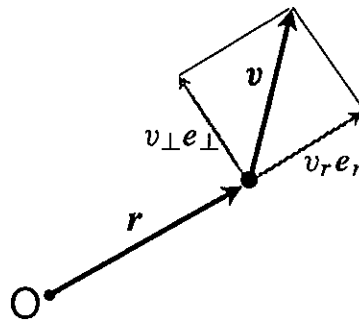


図1

- 問4 粒子に対するラグランジアンを求め、 r, θ, ϕ に対する共役運動量を書け。さらにハミルトニアンを球座標を用いて求めよ。
- 問5 保存量である角運動量の z 成分 l_z と角運動量の大きさの二乗 l^2 を正準変数 θ, p_θ, p_ϕ を用いて表せ。これらの関係を用いて、 z 軸を角運動量ベクトル \mathbf{l} の方向に選んだときに、 $p_\theta = 0, \theta = \pi/2$ あるいは $p_\theta = 0, l = 0$ が満たされ、運動は xy 平面内に限定されることを示せ。

物理学 [I] (答案用紙：黄)

以後、粒子の運動は $\theta = \pi/2$ の xy 平面内に限定し、ポテンシャル $U(r) = -k/r^3$ (k は正の定数) による粒子の散乱を考える。図2のように無限遠方での粒子の速度の大きさを v_0 、粒子は x 軸に平行な方向から衝突パラメータ b で入射するものとする。

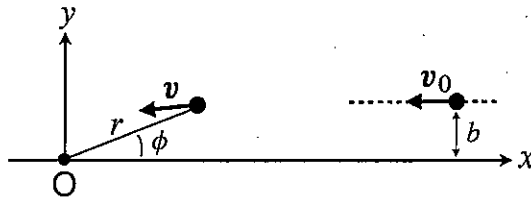


図2

動径方向 r の運動は有効ポテンシャル U_{eff} を用いたエネルギー保存則

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (1)$$

により決定される。また角度変数 ϕ の時間変化は、角運動量保存則より

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\ell}{mr^2} \quad (2)$$

で与えられる。

問6 有効ポテンシャル U_{eff} の式を具体的に書け。この有効ポテンシャルは $r = r_*$ に極大点を持つ。 r_* を求めよ。また有効ポテンシャルのグラフの概形を描け。

問7 無限遠点での粒子の運動を考慮することで、角運動量 ℓ を衝突パラメータ b を用いて表せ。 b がある値 b_* より小さい場合 ($b < b_*$) には、粒子は原点 $r = 0$ に到達可能である。そのような b の臨界値 b_* を求めよ。

問8 式 (1), (2) から粒子の極座標における軌道 $\phi(r)$ が決定される。 r に関する積分形として $\phi(r)$ を書け。 x 軸上 ($x > 0$) で $\phi = 0$ であることに注意せよ。

$b = b_*$ の場合の軌道を考える。そのために、 r_* 近傍での有効ポテンシャルを以下の式で近似する：

$$U_{\text{eff}}(r) \approx U_{\text{eff}}(r_*) + c_1(r - r_*) + c_2(r - r_*)^2 \quad (3)$$

問9 係数 c_1, c_2 を求めよ。

問10 U_{eff} の極大点の半径 r_* 近傍の点 (r_1, ϕ_1) ($r_* < r_1$) から出発した粒子の軌道の式を、**問8**の積分を実行することで求めよ。有効ポテンシャルの形は式 (3) とし、下記の積分公式を用いてもよい。 r が r_* に近づいたときの ϕ の値の振る舞いを考えることで、 xy 平面内での軌道の概形を描け。

[公式]

$$\int \frac{dx}{x^2(x-a)} = \frac{1}{ax} + \frac{1}{a^2} \ln \left| 1 - \frac{a}{x} \right|$$

物理学 [II] (答案用紙 : 赤)

質量 m を持つ 1 個の点状粒子が、位置座標 x として、有限長さ L の 1 次元空間 ($0 \leq x \leq L$) において原点のごく近傍のみに力が働く次のようなポテンシャル $V(x)$ 中を運動している。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \frac{x-a}{a} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (a \leq x) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $V_0 > 0$ であり、定数 a は $a \ll L$ を満たす。系全体が温度 T の熱浴と接していて熱平衡状態にあるとして、次の問いに答えよ。ただし、運動量 p は連続的な変数とし、古典力学として考えよ。また、ボルツマン定数を k 、プランク定数を h とする。なお、次の数学公式を用いても良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2)$$

問 1 温度 $T = 0$ の時の系の内部エネルギーを書け。

問 2 この系の分配関数 $Z(T) = \int \frac{dp dx}{h} \exp\left(-\frac{1}{kT} \left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\right)$ を計算せよ。

問 3 内部エネルギー $U(T)$ が次のように書けることを示せ。

$$U(T) = AkT + kT \frac{-L + a(1 - e^{-\frac{V_0}{kT}})}{-kTa(1 - e^{-\frac{V_0}{kT}})/V_0 + (L - a)} \quad (3)$$

また、数字 A を答えよ。

問 4 $\frac{kT}{V_0} \rightarrow 0$ における内部エネルギーを kT の 1 次まで求めよ。また、 $kT \gg V_0$ の時に内部エネルギーを kT に比例する項と定数項の和として表せ。

問 5 内部エネルギー $U(T)$ の概略を、横軸を kT として、漸近的挙動がわかるように図示せよ。このとき、 $\frac{a}{L} = e^{-\frac{V_0}{kT}}$ が成立する温度において、 $U(T) \sim (A - 2)kT$ となることに注意せよ。

問 6 位置 x の期待値 $\langle x \rangle$ を求めよ。

問 7 $\langle x \rangle$ の温度依存性を、横軸を kT として、漸近的挙動がわかるように図示せよ。

問 8 $U(T)$ および $\langle x \rangle$ の振る舞いが急激に変化する温度は、 V_0/k よりも十分低い。その物理的理由を説明せよ。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学 問題【Ⅲ】【Ⅳ】

2017年8月23日（水）13時00分～15時00分

受験上の注意

1. この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の2題ある。答えは問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が2枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。
2. 答案用紙は青、緑を全員に各1枚、それに草案用紙を各1枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではいない。
3. 答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではいない。

z 軸方向の静電場 $E_0 = (0, 0, E_0)$ がかった真空 (誘電率 ϵ_0) に, 半径 a の一様な誘電率 ϵ を持つ誘電体の球を, 中心が直交座標系の原点 O になるように置いた. ここで $\epsilon = \epsilon_s \epsilon_0$ で, ϵ_s は比誘電率である. 誘電体球の分極を, 正負に一様に帯電した半径 a の2個の仮想的な球 S_1 (中心 O_1 , 電荷密度 $+\rho$) と S_2 (中心 O_2 , 電荷密度 $-\rho$) が, z 軸に沿って微小間隔 d だけ離れた状態として考える (図1). ここで $d = (0, 0, \delta)$ は O_2 から O_1 へのベクトルで, O_1 と O_2 の z 座標はそれぞれ $z = +\frac{\delta}{2}$, 及び $z = -\frac{\delta}{2}$ である. 誘電体球の分極は, 誘電体の持つ比誘電率 ϵ_s の1からのずれと, 誘電体球内部の点 X_{in} での電場 E_{in} に比例し, $\rho d = \epsilon_0(\epsilon_s - 1)E_{in}$ で与えられると考え, 以下の問いに答えよ. ただし, MKSA 単位系を使うこと.

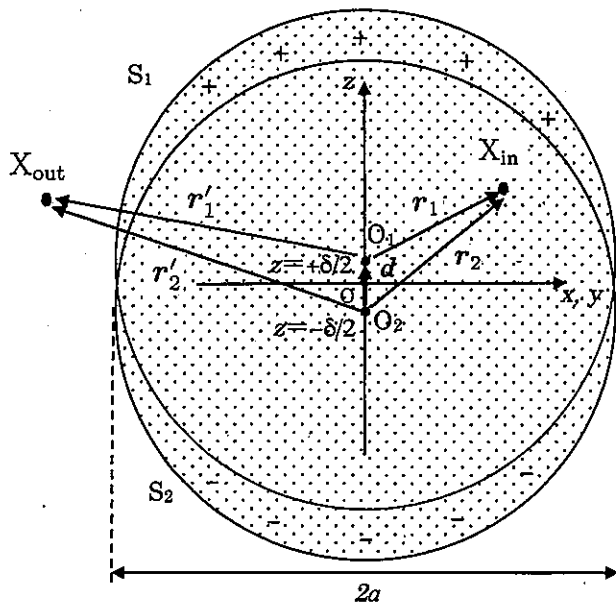


図1

問1 仮想的な球 S_1 のみが存在する場合, S_1 内部の点 X_{in} での電場 E_1 を, ρ と r_1 を用いて表せ. 同様に, 球 S_2 のみが存在する場合, S_2 内部の点 X_{in} での電場 E_2 を ρ と r_2 を用いて表せ. ここで, r_1 および r_2 は, それぞれ O_1 および O_2 から X_{in} への位置ベクトル ($|r_1| < a$, $|r_2| < a$) である.

問2 電場 E_{in} は, 静電場 E_0 と, 誘電体の分極電荷によって作られる電場 E_p との和である. E_p を S_1 と S_2 が作る電場として考え, E_p を ρ と d を用いて表せ.

物理学 [III] (答案用紙：青)

問3 ρd と E_0 との関係を示せ.

問4 誘電体球外部の点 X_{out} での電場 E_{out} を, ρ と r'_1, r'_2 を用いて表せ. ここで, r'_1, r'_2 は, それぞれ O_1 および O_2 から X_{out} への位置ベクトル ($|r'_1| > a, |r'_2| > a$) である.

問5 $|d| = |r'_2 - r'_1|$ が微小である時, δ の1次の項までの近似を行なって, E_{out} の各成分を位置座標 (x, y, z) の関数として示せ.

問6 電場 E_{in} や E_{out} を与える電位 $V_{\text{in}}, V_{\text{out}}$ は, 誘電体のある場合のラプラス方程式を解くことによっても得られる. 誘電体球の内部に真の電荷は存在せず, 無限遠での電場が E_0 となることから, 球内部の点 X_{in} での電位 V_{in} と, 外部の点 X_{out} での電位 V_{out} は以下のように定数 A, B を用いて与えられる.

$$\begin{aligned} V_{\text{in}} &= Ar \cos \theta \\ V_{\text{out}} &= -E_0 r \cos \theta + B \frac{\cos \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, r は原点 O から X_{in} または X_{out} までの距離, θ は原点 O から X_{in} または X_{out} を結んだ線と z 軸とのなす角度である (図2).

V_{in} および V_{out} から得られる E_{in} と E_{out} が, 前問までにおいて求めた結果と一致することから, 上式の定数 A および B を ϵ_s, a および E_0 のみを用いて表せ.

問7 誘電体球表面 ($r = a$) での球内側と外側について, 電位の比 $\frac{V_{\text{in}}}{V_{\text{out}}}$ と, 電場の球表面に垂直な成分 E^r の比 $\frac{E_{\text{in}}^r}{E_{\text{out}}^r}$ を示せ. ここで, $E_{\text{in}}^r = E_{\text{in}} \cdot n$, $E_{\text{out}}^r = E_{\text{out}} \cdot n$ で, n は球表面の法線ベクトルである.

問8 次に, 一様な誘電率 $\epsilon (= \epsilon_s \epsilon_0)$ の誘電体で満たされた空間に, z 軸方向の静電場 $E_0 = (0, 0, E_0)$ がかかっている場合を考える. この誘電体の中から原点 O を中心として半径 a の球状にくりぬいて空洞とし, 中を真空 (誘電率 ϵ_0) とした (図3). 球状空洞の中心から r ($r < a$) 離れた空洞内の点 X_{in} での電場 E_{in} の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ.

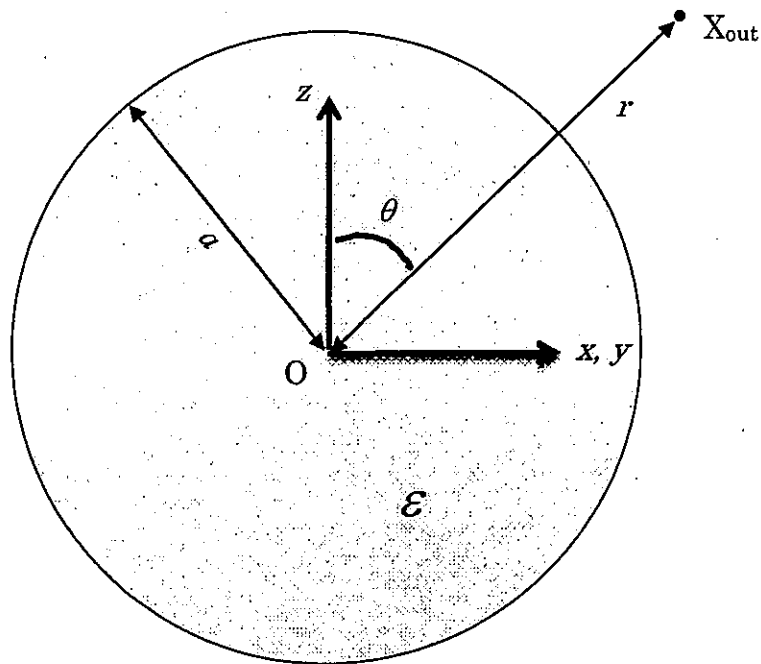


図 2

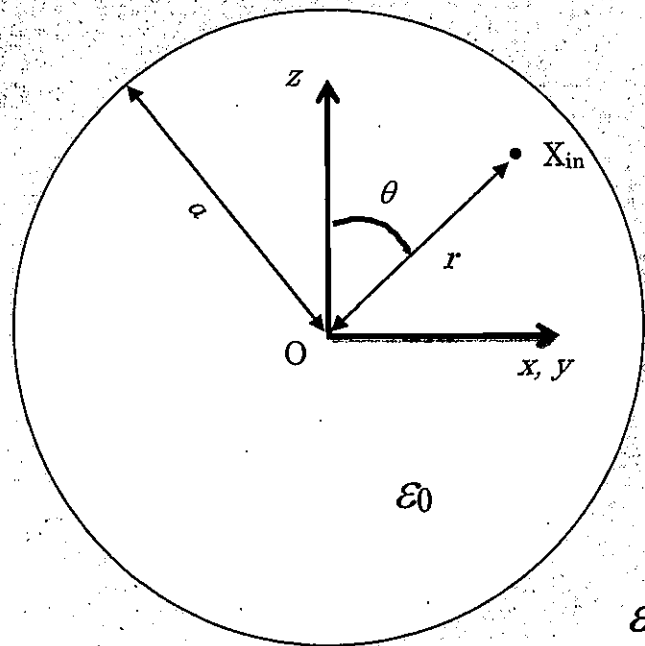


図 3

1次元量子力学での質量 m の粒子の運動を考えよう。ハミルトニアンが次式で与えられるものとする。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

ここで、ポテンシャル $V(x)$ は次式で示される井戸型ポテンシャルである。(図1)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -a) \text{ (領域1)} \\ -V_0 & (|x| < a) \text{ (領域2)} \\ 0 & (x \geq +a) \text{ (領域3)} \end{cases}$$

\hbar はプランク定数、 x は粒子の位置をあらわす座標である。 V_0 と a は正の定数とする。

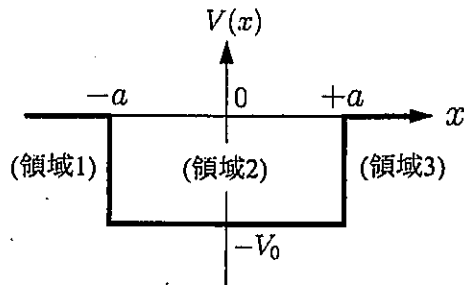


図 1

束縛状態のエネルギー固有値を $E < 0$ とし、その固有状態の波動関数を $\psi(x)$ とする。波動関数 $\psi(x)$ の関数形として

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{k_1 x} + B_1 e^{-k_1 x} & (x \leq -a) \text{ (領域1)} \\ A_2 \cos k_2 x + B_2 \sin k_2 x & (|x| < a) \text{ (領域2)} \\ A_3 e^{k_3 x} + B_3 e^{-k_3 x} & (x \geq +a) \text{ (領域3)} \end{cases}$$

の形を仮定する。ただし、 $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$ とする。

以下の問に答えよ。

問 1 k_1, k_2, k_3 を E, V_0, m を用いて表せ。

また、これらの式から E を消去し、 k_1, k_2, V_0, m の満たすべき関係式を求めよ。

問 2 偶パリティ ($\psi(-x) = \psi(x)$) をもつ束縛状態について考える。**問 1** とは独立な k_1, k_2, a の満たすべき関係式を求めたい。まず、 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ の満たすべき関係式として独立なものをすべて示し、その理由を説明せよ。ただし波動関数の規格化の計算を実際に行う必要はない。

次に、これらの関係式を用いて、 k_1, k_2, a の満たすべき関係式を求めよ。

問 3 **問 1** で得られた k_1, k_2, V_0, m の満たすべき関係式の概形と**問 2** で得られた k_1, k_2, a の満たすべき関係式の概形をグラフに描け。ここで、グラフの縦軸を $k_1 a$ に、横軸を $k_2 a$ にとるものとする。

さらに、このグラフを用いて、偶パリティの束縛状態のエネルギー固有値 E の求め方を説明せよ。

問4 ここで考えた井戸型ポテンシャルの1次元量子力学では、 $V_0 a$ がゼロでない限り、必ず束縛状態が存在する。 V_0 が小さく、 $k_2 a \ll 1$ のときの束縛状態のエネルギー固有値 E を V_0^2 までの次数の近似で求めよ。

次に、図2で示される3次元量子力学の球対称井戸型ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (r \geq a) \quad (\text{領域1}) \\ -V_0 & (0 \leq r < a) \quad (\text{領域2}) \end{cases}$$

による質量 m の粒子の束縛状態について考える。 r は動径座標であり、 V_0 と a は正の定数である。

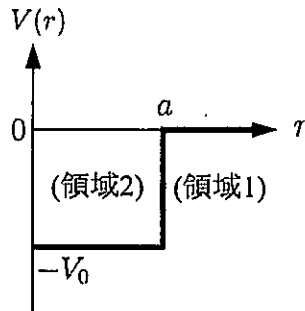


図2

球座標を考え、束縛状態の波動関数 $\psi(r, \theta, \varphi)$ を

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

と動径波動関数 $R(r)$ と角度方向波動関数 $Y(\theta, \varphi)$ に変数分離させる。 θ, φ は角度座標である。角運動量がゼロのとき、動径波動関数に作用するハミルトニアンは

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + V(r)$$

で与えられる。

角運動量がゼロの束縛状態のエネルギー固有値を $E < 0$ とし、その固有状態の動径波動関数を $R(r)$ とする。動径波動関数の関数形として、

$$R(r) = \begin{cases} \frac{A_1}{r} e^{k_1 r} + \frac{B_1}{r} e^{-k_1 r} & (r \geq a) \quad (\text{領域1}) \\ \frac{B_2}{r} \sin k_2 r & (0 \leq r < a) \quad (\text{領域2}) \end{cases}$$

の形を仮定する。ただし、 $k_1 > 0, k_2 > 0$ とする。

以下の問に答えよ。

問5 k_1, k_2 を E, V_0, m を用いて表せ。

さらにこれらの式から E を消去して、 k_1, k_2, V_0, m の満たすべき関係式を求めよ。

また、 A_1, B_1, B_2 の満たすべき関係式から、 k_1, k_2, a の満たすべき関係式を求めよ。

問6 束縛状態をもつための条件を、 V_0, a, m を用いて表せ。

系の次元と束縛状態の有無の関係を一般的に考えよう。そのために、 d 次元量子力学 ($d = 1, 2, 3$) のシュレディンガー方程式

$$E\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

を考える。ここで、 \mathbf{r} は d 次元の位置ベクトル、 ∇ は d 次元のナブラ、 E はエネルギー固有値である。

シュレディンガー方程式 (1) の波動関数を

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \psi_{\mathbf{k}'}$$

のようにフーリエ変換 (平面波展開) すると、

$$(\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - E)\psi_{\mathbf{k}} = \int \frac{d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^d} K(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\psi_{\mathbf{k}'} \quad (2)$$

が得られる。ただし、 $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ は

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$$

である。 $K(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ は積分核と呼ばれる。

以下の問に答えよ。

問 7 ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が、 d 次元デルタ関数 $\delta^{(d)}$ を用いて

$$V(\mathbf{r}) = -V_0 \delta^{(d)}(\mathbf{r}), \quad V_0 > 0$$

と与えられる場合について、積分核 $K(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ を求めよ。

これ以降の計算を進めるにあたって、積分核 $K(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ が

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V_1 \theta(k_c - |\mathbf{k}|) \theta(k_c - |\mathbf{k}'|)$$

で与えられる場合を考える。ここで、 $V_1 > 0$, $k_c > 0$ は適当な定数である。また、 $\theta(x)$ は階段関数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である。このとき、積分方程式 (2) にもし解が存在すれば、 C を適当な定数として

$$\psi_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \frac{C}{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - E} & (|\mathbf{k}| < k_c) \\ 0 & (|\mathbf{k}| > k_c) \end{cases} \quad (3)$$

であることが示され、

$$C = \int_0^{\varepsilon_c} d\varepsilon N_d(\varepsilon) \frac{V_1 C}{\varepsilon - E} \quad (4)$$

であることを示すことができる。ここで、 ε_c は

$$\varepsilon_c = \frac{\hbar^2 k_c^2}{2m}$$

である。式(4)の $N_d(\varepsilon)$ は、一般に、

$$N_d(\varepsilon) = D\varepsilon^{d/2-1}$$

と書くことができる。 $D > 0$ は有限の大きさの定数である。

以下の問に答えよ。

問 8 $d = 1, 2, 3$ の各次元について $E < 0$ の束縛状態が形成されるかどうか、つまり、 $C \neq 0$ の解が存在するかどうか調べる。

$C \neq 0$ の解が存在する場合、式(4)から

$$\frac{1}{DV_1} = \int_0^{\varepsilon_c} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\varepsilon - E} \quad (5)$$

が得られる。 $d = 1, 2, 3$ のそれぞれの場合について、 $E < 0$ であることに注意し、 $E \rightarrow 0$ 極限での式(5)の右辺の積分の性質を調べよ。

次に、この結果を用いて、 $V_1 > 0$ が十分小さい場合に $E < 0$ の束縛状態が形成されるかどうか、 $d = 1, 2, 3$ の各次元について調べよ。

問 9 多数の電子が存在し、フェルミ面が存在する場合を考える。フェルミ面上の2電子間に束縛状態が形成されるクーパー問題の場合は、式(4)のかわりに

$$C = \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F + \varepsilon_c} d\varepsilon N_d(\varepsilon) \frac{V_1 C}{\varepsilon - \varepsilon_F - E} \quad (6)$$

を解くことで、束縛状態の形成を判定することができる。ここで、 ε_F はフェルミエネルギーである。ただし、 $\varepsilon_F \gg \varepsilon_c$ とする。 $V_1 > 0$ が十分小さい場合に $E < 0$ の束縛状態が形成されるかどうか、 $d = 1, 2, 3$ の各次元について調べよ。

また、束縛状態が形成される場合は、束縛状態の E を求めよ。