大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅰ】【Ⅱ】

２０１６年8月２４日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

1．この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

2．答案用紙は黄、赤を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

3．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

図1のように，両端をバネで支えられたコマを考える．このコマは，円盤と，円盤の中心を貫く軸で構成されていて，円盤は軸の中点で軸に垂直に固定されている．円盤は，半径 R，質量 M で，面密度は一様である．軸は，長さ $2l$，質量 m で，線密度は一様である．コマの軸の両端にはバネ定数 k のバネが取り付けられており，それぞれのバネのもう一方の端は枠に取り付けられている．この枠は慣性系で固定されている．バネと枠との接続点を A，D，バネと軸との接続点を B，C とする．接続点 A，D においてバネは自由に向きを変え，バネと軸は接続点 B，C で自由に折れ曲がる．バネは曲がることはなく，コマの回転でねじられることもない．つりあいの状態では，A，B，C，D の4点が一直線に並び，コマの中心と枠の中心が一致する．そのときのバネの長さは自然長で，ともに l に等しい．枠の中心を原点とし，鉛直上方を $+z$ 方向，枠が yz 平面となるような，枠に固定されたデカルト座標 (x,y,z) を用いる．図2のように，コマの中心を原点から動かさずにコマを傾けた場合，コマの軸に平行な単位ベクトル $\boldsymbol{e}=(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ でコマの向きを表す．円盤の厚さ及び軸の太さは無視できる．また，バネの質量は無視できる．さらに，重力，摩擦，空気抵抗は考慮しないものとする．以下の問いに答えよ．

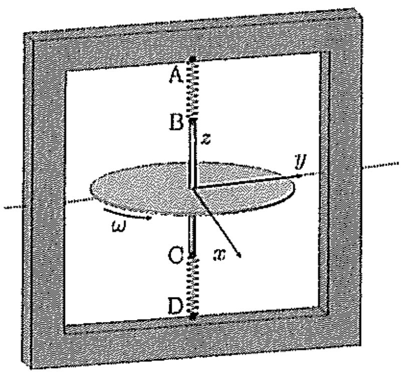

図1

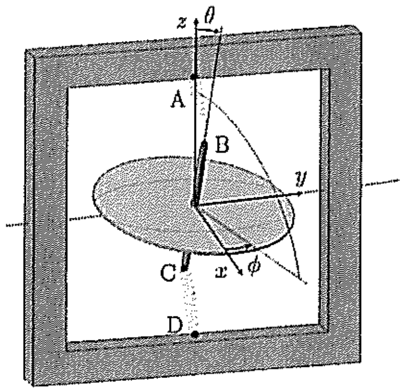

図2

問1　コマを n 個の質点からなる剛体と考える．すなわち互いの相対位置が固定された n 個の質点の集合とする．i 番目の質点の質量を m_i，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とおく．i 番目の質点にこの質点系の外から働く外力を $\boldsymbol{F}_i$，i 番目の質点に j 番目の質点から働く力を $\boldsymbol{F}_{ij}$ とする．$\boldsymbol{F}_{ij}$ は $\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$ に平行であるとして，コマの全角運動量

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\boldsymbol{r}_i\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1}$$

についての運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i \tag{2}$$

で与えられることを示せ．

問2　図1のように，つりあいの状態にあるコマを軸のまわりに角速度 ω で回転させる．コマの角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_0$ は $\boldsymbol{\omega}_0=(0,0,\omega)$ で与えられる．このときのコマの角運動量ベクトルを $\boldsymbol{L}_0$ としたとき，$\boldsymbol{L}_0=I\boldsymbol{\omega}_0$ を満たす定数 I は，コマの軸まわりの慣性モーメントと呼ばれる．I を R，M を用いて表せ．

問３ コマの中心を通り，コマの軸に垂直な直線を回転軸とするときのコマの慣性モーメントを I' とする．I' を l，R，m，M を用いて表せ．

図３に示すように，コマの中心を原点に置いたまま，コマの向きを $\theta = \theta_0$，$\phi = 0$ に固定して，コマの回転を止める．ただし，$0 < \theta_0 < \pi/2$ とする．

問４ この状態は，つりあいの位置（向き）にある状態に比べて，バネのエネルギーが増加している．バネのエネルギーの増加量 ΔU を求めよ．

問５ 次に，コマの固定をそっと解除した．以後のコマの運動における y 軸まわりの角速度の最大値を求めよ．慣性モーメントとして I もしくは I' を用いてもよい．

再び，コマの向きを $\theta = \theta_0$，$\phi = 0$ に固定する．ここで $0 < \theta_0 < \pi/2$ である．この状態でコマを軸まわりに角速度 ω で回転させる (図４)．

問６ コマの角運動量ベクトルを $\boldsymbol{L}$，コマに作用する力のモーメント (すなわち式 (2) の右辺) を $\boldsymbol{N}$ とする．$\boldsymbol{L}$ 及び $\boldsymbol{N}$ を θ_0 の関数として求め，$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{N}$ が直交することを示せ．慣性モーメントとして I もしくは I' を用いてもよい．

問７ 時刻 $t = 0$ にコマの固定をそっと解除したところ，コマは歳差運動をした．ω が十分に大きい場合は，コマの角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の方向は，コマの軸の方向に一致すると考えてよい．この近似が成り立つ範囲内で，$t > 0$ における $\boldsymbol{L}$ を t の関数として表し，歳差運動の周期 T を求めよ．また $|\theta_0| \ll 1$ の場合に，T が θ_0^2 に反比例することを示せ．

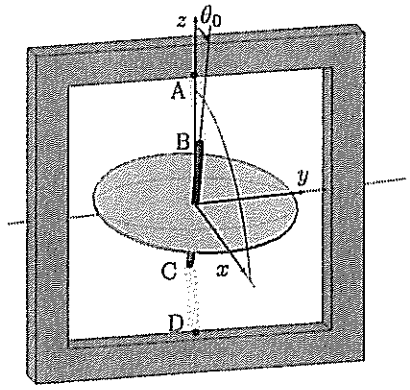

図３

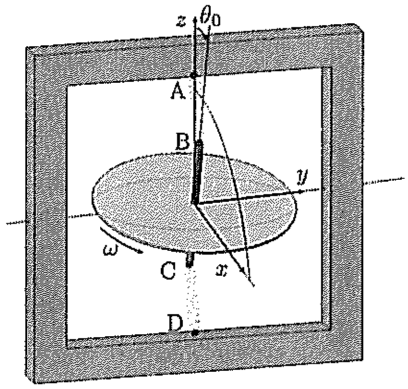

図４

半径 a の十分に長い円柱が真空中に置かれている. 以下では, 円柱中心軸を z 軸にとり, 中心軸から動径方向の距離を r とする. また, 真空の誘電率を ε_0, 真空の透磁率を μ_0 とする.

問 1 円柱内に電荷密度 ρ の電荷が一様に分布している場合を考える. a, d, r, ε_0, ρ のうち, 適切なものを用いて, 以下の問いに答えよ.

(1-1) 円柱内外での電場の大きさ E を r の関数として求めよ.

(1-2) 円柱内外での電位 ϕ を r の関数として求めよ. ただし, 円柱表面（$r = a$）の電位をゼロとする.

(1-3) 図 1 のように, yz 面と平行に, $x = d$（$> a$）のところに十分に広い導体の平板を置く. この導体平板の電位をゼロとしたときに, 円柱中心軸上の電位を求めよ.

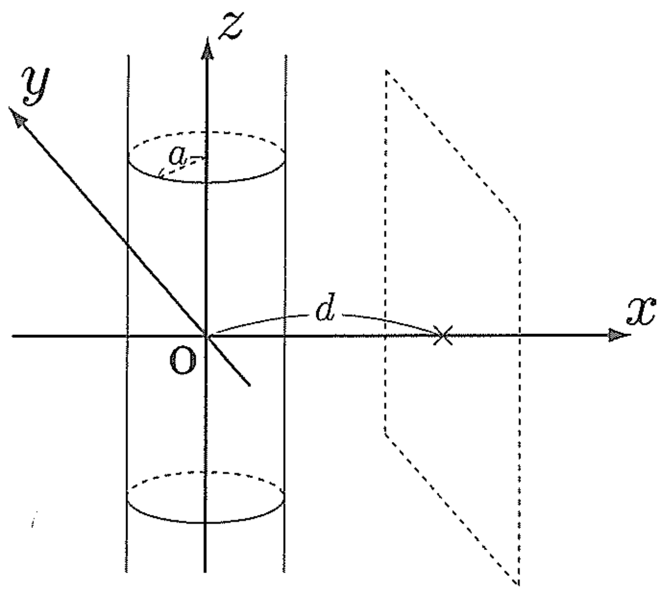

図 1

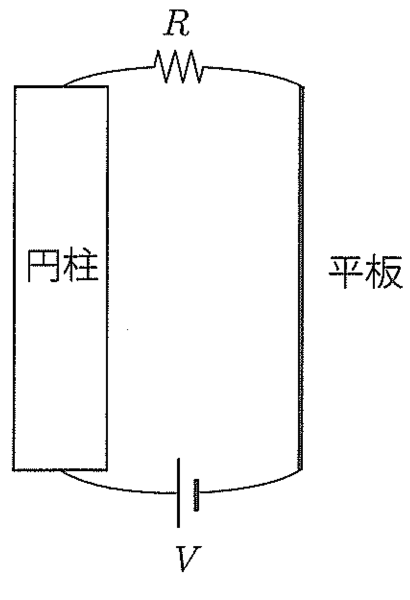

図 2

問 2　次に, 円柱が導体である場合を考える. 円柱は全体としては電気的に中性であり, 電気伝導率は σ で一様とする. 円柱に一様電場を z 軸方向にかけると, 一様な電荷密度 $-\rho$ の自由電子が一定の速さ v で $-z$ 方向に運動し, 定常電流が流れた. a, d, r, v, μ_0, ρ, σ のうち, 適切なものを用いて, 以下の問いに答えよ.

(2-1) 円柱内外での磁場の強さ H を r の関数として求めよ.

(2-2) 円柱内部における z 軸方向の単位長さ, 単位時間あたりの発熱量を求めよ.

(2-3) 円柱表面における Poynting ベクトルの大きさと向きを求めよ. また, 前問 (2-2) の結果と Poynting ベクトルの関係を述べよ.

(2-4) 問題 (1-3) と同様, $x = d$ に十分に広い導体の平板を置いたところ, 平板表面において法線方向の磁束密度がゼロになるように, 平板に表面電流が流れた. 円柱と導体平板に挟まれた xz 平面上の領域を貫く磁束を求めよ. なお, 解答では z 軸方向の単位長さあたりの量を記せ.

問 3　円柱が完全導体（電気伝導率が無限大）である場合を考える. 問題 (1-3) および問題 (2-4) と同様, $x = d$ に十分に広い導体の平板を置き, 導体平板の電位をゼロとする. a, d, R, V, ε_0, μ_0 のうち, 適切なものを用いて, 以下の問いに答えよ.

(3-1) この円柱に, z 軸方向の単位長さあたり $+Q$ の電荷を与えて帯電させると, 円柱の電位が一定になるように電荷が表面へ移動する. この電荷が円柱外部に作る電位は, 次の仮想的な 2 本の線状電荷分布が作る電位に等しい. 1 本は $x = d - \sqrt{(d^2 - a^2)}$, $y = 0$ を通る z 軸に平行な直線で単位長さあたり $+Q$ の電荷が分布し, もう 1 本は $x = d + \sqrt{(d^2 - a^2)}$, $y = 0$ を通る z 軸に平行な直線で単位長さあたり $-Q$ の電荷が分布する. 実際に, この仮想電荷分布は, 円柱表面（$r = a$）および導体平板（$x = d$）において, それぞれ一定の電位を与える. このことを利用して, この系の z 軸方向の単位長さあたりの静電容量を求めよ.

(3-2) 帯電していない導体円柱と導体平板を考える. 図 2 のように, $-z$ 方向の円柱および導体平板の端面間に電圧 V の電源をつなぎ, $+z$ 方向の端面間に抵抗 R をつなぐと, 回路が形成された. このとき, 導体円柱に定常電流が一様に流れるとともに, 問題 (3-1) のように, z 方向に一様に円柱が帯電した. 回路に蓄えられる z 軸方向の単位長さあたりの電磁エネルギーを求めよ. ただし, 円柱内部の磁束および導体平板の抵抗は無視する.

(3-3) 前問 (3-2) の場合において, 導体円柱の z 軸方向の単位長さあたりに作用する力を求めよ. ただし, $+x$ 方向を正とする.

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１６年８月２４日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は青、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。答案用紙の裏面には何も書き込んではならない。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

ポテンシャル

$$V(x) = D\Big[e^{-2kx} - 2e^{-kx}\Big] \qquad (-\infty < x < \infty)\,, \tag{1}$$

の下で1次元空間を運動する質量 m の粒子の量子力学を考える．ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)\,, \tag{2}$$

で与えられる．x は位置演算子，p は運動量演算子であり，$[x, p] = i\hbar$ を満たす．$\hbar$ は，h をプランク定数として，$\hbar = h/(2\pi)$ で与えられる．定数 D と k は正の実数である．

問1 $V(x)$ の概形を図示せよ．

問2 $V(x)$ を $x = 0$ のまわりで x について4次まで展開し，

$$V(x) = -D + Dk^2x^2 + V_3(x) + V_4(x) + \cdots\,, \tag{3}$$

$$V_3(x) = v_3 D\, k^3 x^3\,,$$

$$V_4(x) = v_4 D\, k^4 x^4\,,$$

と書いたときの数係数 v_3 および v_4 を求めよ．

以下では，エネルギー E が $E < 0$ となる束縛状態を考える．まず，(3) 式の展開で $O(x^2)$ まで考慮したハミルトニアン

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - D + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad \left(\text{ただし}\quad \omega \equiv \sqrt{\frac{2k^2D}{m}}\right)\,, \tag{4}$$

を扱う．昇降演算子 $a^\dagger$, a を

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)\,, \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)\,, \tag{5}$$

で定義したとき，$a^\dagger a$ の固有状態 $|n\rangle$ （ただし $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）は，以下の関係式を満たす．

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle\,, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,. \tag{6}$$

【参考： (1) 式のポテンシャルで束縛状態を形成するためには，n に対して $n \leq \frac{2D}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$ という条件が必要となるが，本問題を解く上ではこの条件は特に気にしなくてよい．】

問3 ハミルトニアン H_0 を $a, a^\dagger, D, \hbar, \omega$ を用いて表せ．ただし，k と m は消去せよ．

問4 $|n\rangle$ が H_0 の固有状態であることを示し，その固有エネルギー $E_n^{(0)}$ を求めよ．

次に, (3) 式の展開に基づいて, (4) 式で与えられる H_0 を非摂動ハミルトニアンとして, $V_3(x)$ と $V_4(x)$ を摂動ハミルトニアンとして取り扱う. 無次元のパラメータ

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega}{D}}\,, \tag{7}$$

を導入し, $\lambda \ll 1$ の場合を考察する.

摂動論によれば, n 番目の準位の 1 次および 2 次の摂動エネルギーの表式は, それぞれ

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle n|H'|n\rangle\,, \qquad \Delta E_n^{(2)} = \sum_{l(\neq n)} \frac{|\langle l|H'|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_l^{(0)}}\,, \tag{8}$$

で与えられる. ここで, H' は摂動ハミルトニアンであり, $E_n^{(0)}$ は**問4**で求めたものである.

問5 $V_3(x)$ および $V_4(x)$ を $a, a^\dagger, \hbar, \omega, \lambda, v_3, v_4$ を用いて表せ. ただし, D, k, m は消去せよ.

問6 $V_3(x)$ について 1 次の摂動エネルギーがゼロになることを示せ.

問7 n 番目の準位に対して, $V_4(x)$ について 1 次の摂動エネルギーを計算せよ. ただし, 以下の関係式を証明なしに用いてよい.

$$\langle n|(a + a^\dagger)^4|n\rangle = 6n^2 + 6n + 3\,. \tag{9}$$

問8 n 番目の準位に対して, $V_3(x)$ について 2 次の摂動エネルギーを計算せよ. ただし, 以下の関係式を証明なしに用いてよい.

$$\begin{aligned}\langle l|(a + a^\dagger)^3|n\rangle = {} & \sqrt{n(n-1)(n-2)}\,\delta_{l,n-3} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,\delta_{l,n+3} \\ & + 3\sqrt{n^3}\,\delta_{l,n-1} + 3\sqrt{(n+1)^3}\,\delta_{l,n+1}\,.\end{aligned} \tag{10}$$

ここで $l, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ であり, $\delta_{l,n}$ はクロネッカーのデルタである. **問7**と**問8**で得られた結果をあわせると, λ について 2 次のエネルギー補正が得られる.

問9 (2) 式で与えられる H の n 番目の準位の固有状態を $|\psi_n\rangle$ とする. λ について 1 次までの計算によれば, 座標 x の期待値 $\langle\psi_n|x|\psi_n\rangle$ が

$$\langle\psi_n|x|\psi_n\rangle = b\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\lambda(2n+1)\,, \tag{11}$$

で与えられる. ここで b は数係数である. ポテンシャル $V(x)$ の概形に基づいて, b の正負を考察せよ. ただし, b を計算であらわに求める必要はない. **問2**で得られた v_3 の符号に注意して考察してもよい.

【参考： $V(x)$ はモース・ポテンシャルと呼ばれ, 2 原子分子の分子振動を記述する有効原子間ポテンシャルとして用いられる. **問9**で求めた $\langle\psi_n|x|\psi_n\rangle$ は, 平均原子間距離 $\langle r\rangle$ の平衡核間距離 r_0 からのずれ, すなわち $\langle r\rangle - r_0$ に対応している.】

2 次元理想気体に関する以下の問いに答えよ．粒子の質量を m，温度を T，ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h とする．$\hbar = h/2\pi$，$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ である．

問 1　2 次元古典理想気体を考える．2 次元系の面積を A，粒子数を $N(\gg 1)$ とする．

a.　分配関数 Z は

$$Z = \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{2N}} \prod_{j=1}^{N} \int d\boldsymbol{r}_j d\boldsymbol{p}_j e^{-\beta|\boldsymbol{p}_j|^2/2m} \tag{1}$$

で与えらえる．ここで $\boldsymbol{r}_j$ は粒子 j の座標，$\boldsymbol{p}_j$ は粒子 j の運動量である．分配関数 Z を熱的ド・ブロイ波長 $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}}T}$ を用いて表せ．

b.　内部エネルギー U と定積熱容量 C を求めよ．

c.　圧力 P はヘルムホルツの自由エネルギー F を用いて

$$P = -\frac{\partial F}{\partial A} \tag{2}$$

で与えられる．$PA = U$ が成り立つことを示せ．

d.　ある 1 粒子に着目したとき，その粒子の運動量が $\boldsymbol{p}$ となる確率密度 $w(\boldsymbol{p})$ を求めよ．

問 2　2 次元理想フェルミ気体 (スピン 1/2) を考える．2 次元系の面積を A，化学ポテンシャルを μ とし，$T = 0$ における μ を ϵ_{F} とする．以下ではゾンマーフェルトの展開公式

$$\int_0^\infty g(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon = \int_0^\mu g(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}g'(\mu)(k_{\mathrm{B}}T)^2 + O((k_{\mathrm{B}}T)^4) \quad (k_{\mathrm{B}}T \ll \mu) \tag{3}$$

を使ってよい．ここで $f(\epsilon)$ はフェルミ分布関数

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \tag{4}$$

であり，$g(\epsilon)$ は $\epsilon = \mu$ 付近で滑らかな任意の関数である．

a.　絶対零度と有限温度 ($k_{\mathrm{B}}T \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$) のそれぞれの場合に $f(\epsilon)$ の概形を ϵ の関数として図示せよ．

b.　1 粒子のエネルギー $\epsilon_{\boldsymbol{k}}$ は波数 $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ を用いて $\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/2m$ で与えられる．このとき粒子の状態密度 $D(\epsilon)$ は

$$D(\epsilon) = \begin{cases} D_0 & (\epsilon \geq 0) \\ 0 & (\epsilon < 0) \end{cases} \tag{5}$$

と表される．定数 D_0 を求めよ．

c.　化学ポテンシャル μ の低温における温度依存性を T の 2 次までの範囲で

$$\mu(T) \cong \epsilon_{\mathrm{F}} + a(k_{\mathrm{B}}T)^2 \tag{6}$$

と表したとき，a を求めよ．

d. 内部エネルギー U は

$$U = \int_0^\infty \epsilon D_0 f(\epsilon) d\epsilon \tag{7}$$

で与えられる．低温における内部エネルギー U を T の 2 次まで，定積熱容量 C を T の 1 次まで求めよ．

e. 熱力学ポテンシャル Ω が

$$\Omega = -k_\mathrm{B} T \int_0^\infty D_0 \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}] d\epsilon \tag{8}$$

と表されることをグランドカノニカル統計に基づいて説明せよ．

f. 圧力を P とする．全ての温度 T で $PA = U$ が成り立つことを示せ．

問 3 金属中の電子は外界（真空）に対して W (>0) だけ低い位置エネルギーを持つ．真空準位とフェルミエネルギー ϵ_F の差 $\Phi = W - \epsilon_\mathrm{F}$ (>0) は仕事関数と呼ばれる．絶対零度では電子は金属中に閉じ込められているが，有限温度では電子は熱的に励起され，外界へ出ることができる．この金属を陰極とし，外界に出た電子を全て別の陽極に引き付けたときに流れる電流を I とする．以下では 2 次元金属を考え，その中の電子を 2 次元理想フェルミ気体として扱う．電流 I は x 方向に流れるものとする（図 1)．

a. 電流 I は

$$I = R \int_{\sqrt{2mW}/\hbar}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \frac{\hbar k_x}{m} f(\epsilon_{\boldsymbol{k}}) \tag{9}$$

と表される．ここで R は定数，$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ は電子の波数，$\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/2m$ は電子の運動エネルギー，$f(\epsilon_{\boldsymbol{k}})$ はフェルミ分布関数である (図 2)．k_x 積分を実行し，k_y 積分を残した I の表式を求めよ．

b. $\epsilon_\mathrm{F} \gg k_\mathrm{B}T$ かつ $\Phi \gg k_\mathrm{B}T$ の場合，全ての積分を実行すると，I の温度依存性は

$$I \propto T^\gamma e^{\alpha(T)} \tag{10}$$

と表される．定数 γ および $\alpha(T)$ の表式を求めよ．

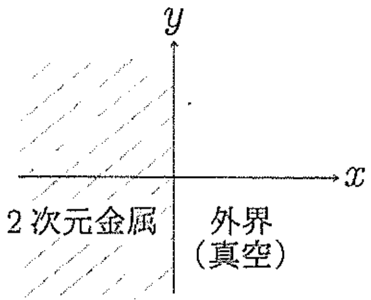

図 1

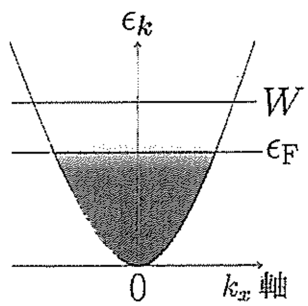

図 2