大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅰ】【Ⅱ】

２０１５年8月２６日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は黄、青を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

図1に示すように、等しい質量mを持つ3つの質点が、滑らかで水平な床の上に一直線上に並べられ、質量が無視できるバネで連結されている。端のバネは壁に取り付けられており、壁と質点を結ぶバネのバネ定数をK、質点と質点の間をつなぐバネのバネ定数をCとする。3つの質点を左から順に質点i (i =1, 2, 3)とし、それらの平衡位置からの変位(右向きを正とせよ)をx_iとして以下の問に答えよ。ただし、変位は十分に小さく、運動はバネの伸縮方向に限られると考えて良い。

(1) 質点iの運動エネルギーを書け。

(2) 3つの質点からなる系のラグランジアンを書け。

(3) このラグランジアンから、質点iについての運動方程式を求めよ。

(4) 運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

の形で書ける。$\hat{A}$は3行3列の行列である。行列$\hat{A}$の固有値λ_iを求める方程式を書け。

(5) $K > 0$かつ$C > 0$における行列$\hat{A}$の固有値λ_iは、連成振動の基準振動数ω_iと$\omega_i = \sqrt{-\lambda_i/m}$の関係にある。また対応する固有ベクトル$\vec{a}_i$は、基準座標$\xi_i$と$x_i$の関係を与える。$\omega_i$および$\xi_i$を用いて(3)で求めたラグランジアンを書き直し、この問題で基準振動を考えることがなぜ有用なのか簡単に述べよ。

(6) $K = C > 0$のとき、行列$\hat{A}$の固有値λ_iと、対応する固有ベクトル$\vec{a}_i$を大きさ1で規格化して求めよ。

(7) $K = 0$であっても、基準振動の概念を適応できるはずである。$K = 0$の場合の基準振動は具体的にどのような運動か、行列$\hat{A}$の固有値λ_iと固有ベクトル$\vec{a}_i$を基に説明せよ。

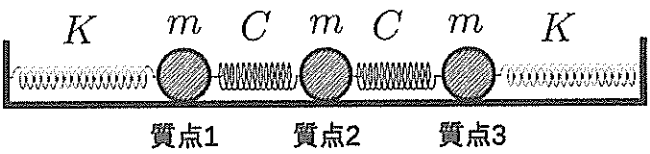

図1

物理学 [II] (答案用紙：青)

半径が a で電荷と質量が一様に分布している球を考える．球の全電荷を $Q(>0)$，全質量を Mとし，球の中心は原点にあるものとする．真空の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 とし，以下の問に答えよ．

問 1. 位置 $\boldsymbol{r}$ での (1) 電場と (2) 電位を求めよ． ただし，無限遠方での電位を 0 とする．

問 2. 球がもつ静電エネルギーを求めよ．

以下においては，上記の球がz軸を中心に一定の角速度で回転しているとする． その角速度を $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$，ただし $\omega>0$ とし，ωa は光速より十分小さいものとする．

問 3. 球の中心での磁場の大きさと向きを求めよ．

問 4. 原点から観測点までの距離が球の半径 a に比べて十分に大きいときには，球全体を一つの磁気双極子と見なせる．この時，球の磁気双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の大きさが $\mu=\dfrac{1}{5}Q\omega a^2$ となることを示せ． 円周を流れる電流のつくる磁気双極子モーメントの大きさが電流の大きさと円の面積との積で書けることを用いてよい．

問 5. 位置 $\boldsymbol{r}$ における磁場とポインティングベクトルを求めよ． ただし，$|\boldsymbol{r}|=r\gg a$ であり，原点にある磁気双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ が位置 $\boldsymbol{r}$ につくるベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ と書ける．

問 6. 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は回転する球の角運動量 $\boldsymbol{L}$と定数 γ を用いて$\boldsymbol{\mu}=\gamma\boldsymbol{L}$ と書ける． 定数 γ を球の全質量 M と全電荷 Q を用いて表せ．

上記の自転する球に外部静磁場 $\boldsymbol{H}=(0,H_y,H_z)$ をかけたところ，外部静磁場の方向を軸とする歳差運動をおこした．

問 7. 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ が外部静磁場 $\boldsymbol{H}$ から受ける偶力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を求めよ． 磁気双極子は正負一対の磁荷 q_m，$-q_m$ ($q_m>0$) によっても定義でき，その磁気双極子モーメントは $-q_m$ を始点，q_m を終点とするベクトル $\boldsymbol{d}$ によって $\boldsymbol{\mu}=q_m\boldsymbol{d}$ と書けることを用いてもよい．

問 8. 角運動量 $\boldsymbol{L}$ と偶力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を用いて歳差運動の運動方程式を書け．

問 9. 運動方程式より歳差運動の角速度の大きさ Ω を求めよ．

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１５年8月２６日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．答案用紙は赤、緑を全員に各１枚、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

３．答案用紙最上段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

質量 m, 角振動数 ω を持つ 1 次元調和振動子の量子力学は以下のハミルトニアンにより記述される。

$$\widehat{H}_x = \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \ . \tag{1}$$

ここで, $\hat{x}, \hat{p}_x$ はそれぞれ x 方向の位置演算子および運動量演算子を表す。これらは以下の交換関係を満たす。

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar\ , \ \text{(その他の交換関係はすべてゼロ)}\ . \tag{2}$$

ここで, $\hbar$ は換算プランク定数（プランク定数を 2π で割ったもの）である。

問 1　以下の演算子

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right)\ , \quad \hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right)\ , \tag{3}$$

を定義する。これから, 交換関係

$$[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger]\ ,$$

を計算せよ。

問 2　ハミルトニアン $\widehat{H}_x$ を $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger$ で表せ。

問 3　規格化された $\widehat{H}_x$ の固有状態は一般に, 正の実数の規格化因子 C_{n_x} を用いて

$$|n_x\rangle = C_{n_x}\ \left(\hat{a}_x^\dagger\right)^{n_x}\ |0\rangle\ , \ (n_x = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

で与えられる。ここで, $|0\rangle$ は規格化された基底状態である。C_{n_x} を求めよ。

質量 m, 角振動数 ω を持つ 2 次元調和振動子の量子力学を考える。そのハミルトニアンは以下で与えられる。

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)\ . \tag{5}$$

ここで, $\hat{x}, \hat{y}$ はそれぞれ x, y 方向の位置演算子, $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ はそれらに共役な運動量演算子を表す。これらは以下の交換関係を満たす。

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar\ , \ \text{(その他の交換関係はすべてゼロ)}\ . \tag{6}$$

規格化された $\widehat{H}_0$ の固有状態は,

$$|n_x, n_y\rangle = C_{n_x} C_{n_y} \left(\hat{a}_x^\dagger\right)^{n_x} \left(\hat{a}_y^\dagger\right)^{n_y} |0\rangle \ , \quad (n_x, n_y = 0, 1, 2, \cdots) \tag{7}$$

で与えられる。ここで,

$$\hat{a}_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{y} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_y\right) \ , \quad \hat{a}_y^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{y} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_y\right) \ . \tag{8}$$

問 4 角運動量演算子 $\hat{l} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ を考える。$\hat{l}$ を $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ で表せ。

問 5 $\hat{l}$ が $|n_x, n_y\rangle$ に作用すると,

$$\hat{l}|n_x, n_y\rangle = i\hbar\Big(\alpha(n_x, n_y)\,|n_x - 1, n_y + 1\rangle + \beta(n_x, n_y)\,|n_x + 1, n_y - 1\rangle\Big) \ , \tag{9}$$

と書ける。関数 $\alpha(n_x, n_y)$, $\beta(n_x, n_y)$ を n_x, n_y で表せ。

問 6 $\widehat{H}_0$ の固有値を $E_N^{(0)} = \hbar\omega(N+1)$ と表す。各 N に対して, 対応する固有状態はいくつ存在するか, その縮退度 $n_{\rm deg}(N)$ を答えよ。

各 N に対して, 縮退した $\widehat{H}_0$ の固有状態を n_x の小さい順に並べたものを $|k\rangle_N$, $(k = 0, 1, \cdots, n_{\rm deg}(N) - 1)$ と呼ぶことにする。

問 7 $N = 2$ の場合に, $\hat{l}$ の行列表示 ${}_N\langle j|\hat{l}|k\rangle_N$, $(j, k = 0, 1, \cdots, n_{\rm deg}(2) - 1)$ を求めよ。

質量 m, 電荷 e の荷電粒子の量子論的ハミルトニアンを考える。

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}})\right)^2 + e\phi(\hat{\boldsymbol{r}}) + V(\hat{\boldsymbol{r}}) \ . \tag{10}$$

ここで, $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$。また, $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ および ϕ はそれぞれベクトルポテンシャル, スカラーポテンシャルを表す。V はそれ以外のポテンシャル項である。

問 8 $\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}) = (-B\hat{y}/2, B\hat{x}/2, 0)$ かつ $\phi(\hat{\boldsymbol{r}}) = 0$ の場合に着目する。ここで, B は正の定数である。これから電場と磁場を求めよ。

問 9 前問の $\boldsymbol{A}, \phi$ に加え, ポテンシャルとして $V(\hat{\boldsymbol{r}}) = (1/2)m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$ を考える。荷電粒子の z 方向の運動は以下の議論には無関係なので無視する。この $\widehat{H}$ を B についてべき展開すると,

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1 + \mathcal{O}(B^2)\ , \tag{11}$$

となる。ここで, $\widehat{H}_0$ は式 (5) で与えた 2 次元調和振動子のハミルトニアンである。また, $\mathcal{O}(B^2)$ は B の 2 次以上の項を表す。B について 1 次の項 $\widehat{H}_1$ を求めよ。

問 10 問 6 で見たとおり, $\widehat{H}_0$ の固有状態は縮退している。この縮退は $\widehat{H}_1$ を摂動として加えることにより解ける。$N = 2$ の場合に, 縮退したエネルギー準位 $E^{(0)}_{N=2}$ が摂動の 1 次まででどのように解けるか, 調べよ。

直線上の $N+1$ 個の質点を考える．一番左にある質点は原点に固定されていて，それより右側にある N 個の質点はすべて質量 m を持ち，x 軸上を動くことができる．これら $N+1$ 個の質点に対する座標値を $x_i\ (i=0,1,2,\ldots,N)$ とする．ただし，$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N$ とする．隣り合う質点の間には相互作用が働き，その２体のポテンシャルエネルギーは質点間の距離を r とするとき

$$V(r)=\begin{cases}+\infty & (r<\ell)\\ 0 & (\ell\le r\le \ell+L)\\ +\infty & (r>\ell+L)\end{cases}$$

という井戸型ポテンシャルで与えられるものとする．ただし，$\ell>L>0$ とする．一番右にある質点 (すなわち座標値 x_N の質点) に右向き（すなわち x 軸の正の向き）に一定の力 f が加わっている．この系を古典系と考え，系全体の温度を T として，以下の問に答えよ．

必要に応じて次の公式を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

問 1. 各質点の運動量を p_i と表し，全系のハミルトニアンを書け．ただし，全系のポテンシャルエネルギーは２体ポテンシャル関数 V を用いて表せ．

問 2. 全系の分配関数 Z が次の式で与えられることを示せ．

$$Z=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{N/2}\frac{(k_{\mathrm{B}}T)^{3N/2}}{f^N}e^{Nf\ell/k_{\mathrm{B}}T}\left(e^{fL/k_{\mathrm{B}}T}-1\right)^N$$

ただし，$\hbar=h/2\pi$ は換算プランク定数，k_{B} はボルツマン定数である．

問 3. 全系の内部エネルギーを求めよ．

問 4. 力 f を一定に保つ条件で全系の熱容量を求めよ．

問 5. 全系の長さに対応する x_N の期待値 $\langle x_N\rangle$ を求めよ．

問 6. $\langle x_N\rangle$ を力 $f=0$ の周りで f について１次までテイラー展開することにより，この系が力の弱い極限で近似的にバネとみなせることを示し，その自然長とバネ定数を求めよ．