大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅰ】【Ⅱ】

２０１３年8月２８日（水）9時２０分～１１時２０分

受験上の注意

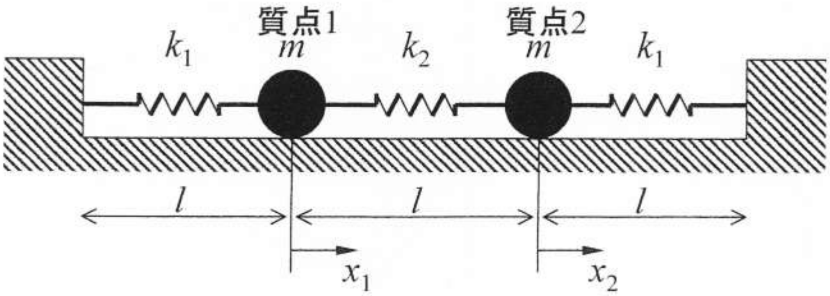
1．この冊子には物理学【Ⅰ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

2．素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）もしくは物質理学専攻（物理系）を第４志望までに１つでも志望するものは、物理学【Ⅰ】および【Ⅱ】のみを選択すること。

3．答案用紙は黄、青を全員に各１枚、出願時の志望先に応じて必要な者に紫を２枚ずつ、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

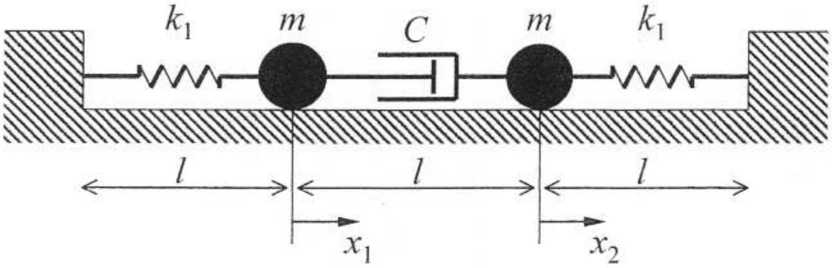
4．答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

下図のように質量 m の質点 1、2 をバネ定数 k_1、k_2、k_1、自然長 l のバネで繋ぎ、その両端を壁に固定した。固定した両端の距離と 3 つのバネの自然長の和は一致しており、すべての質点とバネは一直線に並びかつ質点はその直線上のみ運動するものとする。また、質点と床の摩擦、バネの質量、重力は無視できるものとする。各々の質点の平衡状態からの変位を x_1、x_2 とし、x_1、x_2 が十分小さい場合について以下の問いに答えよ。



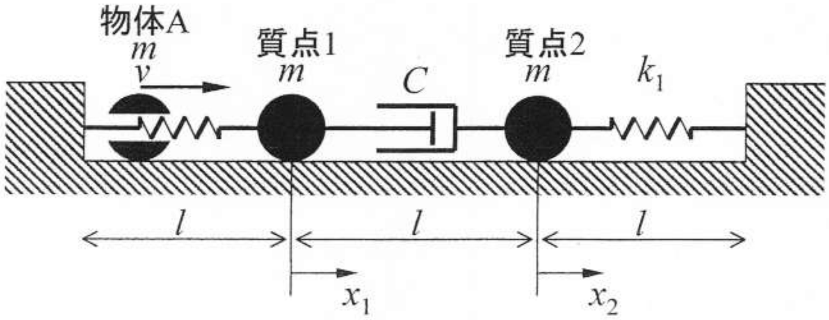
1. この系のラグランジアンを求めよ。
2. x_1、x_2 に対する運動方程式を求めよ。
3. 問 2 で得た運動方程式を重心座標 $q_1 = (x_1 + x_2)/2$、相対座標 $q_2 = x_1 - x_2$ を用いた方程式に書き直し、基準振動数を求めよ。
4. 初期条件が、時刻 $t = 0$ において $x_1 = a$、$\dot{x}_1 = 0$、$x_2 = 0$、$\dot{x}_2 = 0$ であった場合の x_1、x_2 の時間変化の概略をそれぞれ図示せよ。ただし $k_1 \gg k_2$ とする。

次に、下図のように中央のバネを両端の速度差に比例した抵抗力をもつダンパー（比例定数 C、ただし $C > 0$）に置き換えた。



5. この場合に x_1、x_2 を用いた運動方程式を求めよ。
6. 時刻 $t = 0$ において $x_1 = a$、$\dot{x}_1 = 0$、$x_2 = 0$、$\dot{x}_2 = 0$ であった場合の x_1、$q_1 = (x_1 + x_2)/2$、$q_2 = x_1 - x_2$ の時間変化の概略をそれぞれ図示せよ。ただし、$C \ll \sqrt{mk_1}$ とする。

続いて、問 6 の条件で十分に時間が経過した後に、穴が開いているが質点とみなせる質量 m の物体 A を下図のように同一直線上を左から右向きに速度 v で質点 1 に衝突させた。衝突した時の質点 1 の変位は $x_1 = 0$ であり、衝突後の物体 A の速度は衝突前と反対向きで大きさが同じ $-v$ となった。衝突は弾性衝突であり、物体 A と床の摩擦は無視できるものとし、衝突後には物体 A と他の質点は再び衝突しないものとした場合に以下の問いに答えよ。



7. 速度 v を m、k_1、C、a の内から適当なものを用いて表せ。
8. 衝突後の x_1、q_1、q_2 の時間変化の概略をそれぞれ図示せよ。

1. 面積 S の 2 枚の導体板の電極を距離 d_0 の間隔で平行に対置させた平行板コンデンサーに一定電圧 V_0 をかけ，陽極と陰極にそれぞれ $+Q_0$ と $-Q_0$ の電荷を与えた (図 1)。面積 S は十分に大きく，コンデンサー内の電場は一様であるとする。真空の誘電率は ϵ_0 とし，Q_0, ϵ_0, d_0, S の中から適当なものを用いて，以下の問いに答えよ。

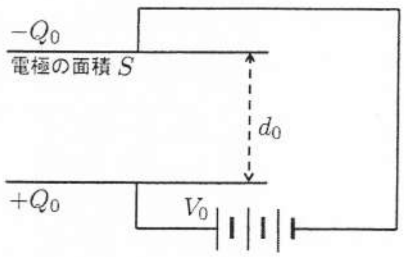


図 1

(a) ガウスの法則を用いて，コンデンサー内の電場の大きさ E を求めよ。このとき，導出に用いたガウスの法則の式も書け。

(b) 電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ と V_0 の関係を線積分で表せ。これに (a) で求めた電場の大きさ E を代入して V_0 を求めよ。

2. 問 1 の平行板コンデンサーに蓄えられていた Q_0 の電荷を放電し，このコンデンサー (電気容量 C) に電源 B と抵抗 (抵抗値 R) をつなぎ，図 2 のような RC 回路を作った。電源 B は図 3 の時間依存性を持つ電圧 $V_{\mathrm{B}}(t)$ を発生した。このとき，コンデンサーに蓄えられる電荷を $Q(t)$ とし，以下の問いに答えよ。

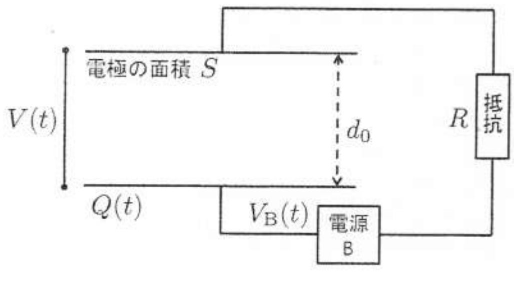


図 2

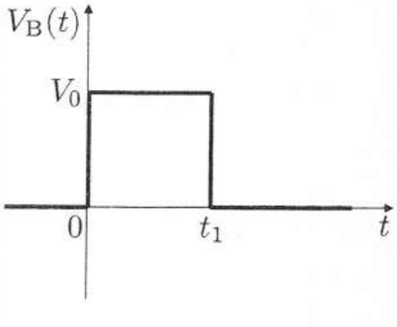


図 3

(a) 電荷 $Q(t)$ の時間変化を求めるのに必要な微分方程式を R, C, $V_{\mathrm{B}}(t)$ を用いて書け。

(b) $0 < t < t_1$ におけるコンデンサーの電極間の電位差 $V(t)$ を求めよ。また，t_1 が R と C の積で表される時定数 RC に比べて充分大きい場合，$Q(t_1)$ の大きさは問 1 のときに蓄えられていた電荷に等しいことを確かめよ。

(c) $t > t_1$ におけるコンデンサーの電極間の電位差 $V(t)$ を求めよ。

(d) 時定数 RC が t_1 程度の場合と t_1 と比べて充分小さい場合の 2 つについて，$V(t)$ のグラフの概略を描け。

3. 問 1 の平行板コンデンサーを放電させた後，ガスが充填された容器の中に入れる。この平行板コンデンサーの陽極と陰極にそれぞれ電荷 $+Q_1$ と $-Q_1$ を与えた後，他の回路とは切り離す。この状態で，コンデンサーの陽極から x だけ離れた所に，面密度 $+\sigma$ ($\sigma \ll Q_1/S$) の平面状の電荷と面密度 $-\sigma$ の平面状の電荷が極板と平行に瞬間的に生成した。この 2 つの面をプラス面とマイナス面と呼び，これらの面の面積は極板の面積と等しい。その後，図 4 のように，プラス面とマイナス面は極板に向かってそれぞれ一定の速さで移動した。ガスの誘電率を ϵ，プラス面の速さを v^+，マイナス面の速さを v^-(v^- は v^+ よりも充分大きく，マイナス面の方がプラス面よりも先に電極に到達する) として，以下の問いに答えよ。
   (a) マイナス面が電極に到達する前における，マイナス面が作る電場の大きさ E^- を求めよ。ただし，マイナス面の上下における E^- は等しいとする。
   (b) マイナス面が電極に到達した時刻を t^-，プラス面が電極に到達した時刻を t^+ とする。$t < t^-$，$t^- < t < t^+$，$t > t^+$ の 3 つに分け，$t^- \ll t^+$ とする時のコンデンサーの極板間の電位差 $V_{\mathrm{C}}(t)$ を求めよ。
   (c) $V_{\mathrm{C}}(t)$ の時間変化を示すグラフの概略を描け。
4. 図 5 のように，ガス容器の中の平行板コンデンサーに一定電圧 V_0 の電源と抵抗 (抵抗値 R) をつなぎ，最初に平行板コンデンサーの陽極と陰極にそれぞれ電荷 $+Q_1$ と $-Q_1$ を与える。この状態で，平行板コンデンサー内部では，問 3 と全く同様に，面密度 $\pm\sigma$ の電荷を持つ 2 つの平面が瞬間的に生成し，プラス面は速さ v^+，マイナス面は速さ v^- (v^- は v^+ よりも充分大きい) で電極に向かってそれぞれ一定の速さで移動した。平行板コンデンサーの電気容量と R からなる時定数が t^- より充分大きく，t^+ より充分小さいとき，コンデンサーの極板間の電位差 $V_{\mathrm{C}}(t)$ について考える。$V_{\mathrm{C}}(t)$ の t 依存性を示すグラフの概略を描け。また，その図が問 3(c) で解答したグラフとどのように異なるかを説明せよ。

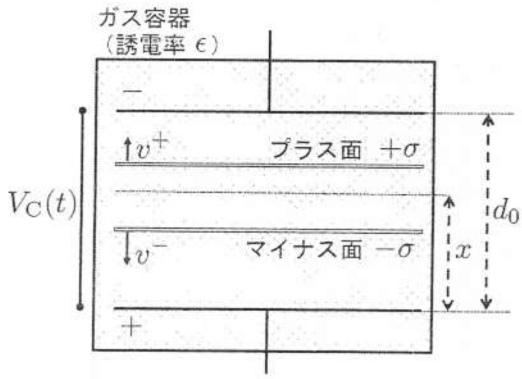


図 4

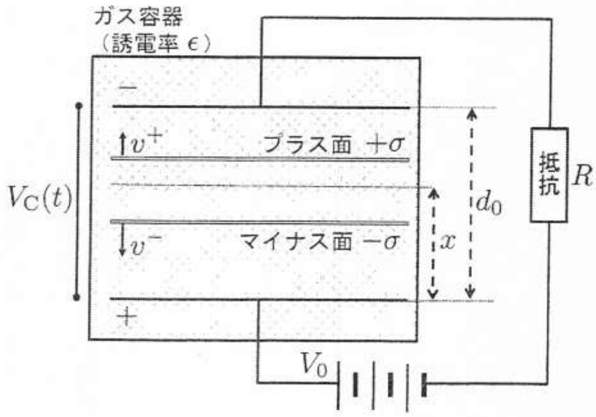


図 5

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１３年８月２８日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

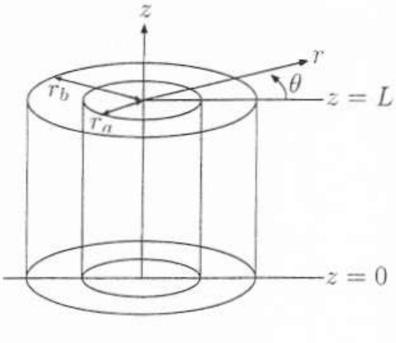
１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）もしくは物質理学専攻（物理系）を第４志望までに１つでも志望するものは、物理学【Ⅲ】および【Ⅳ】のみを選択すること。

３．答案用紙は赤、緑を全員に各１枚、出願時の志望先に応じて必要な者に茶を２枚ずつ、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、答案用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

４．答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

中空の同心二重円筒容器に閉じ込められた一電子を考える。以下の図にある通り、容器の内径は r_a、外径は r_b、高さは L で、円筒の軸は円柱座標 (r,θ,z) における z 軸方向を向いている。電子は外径と内径の間に閉じ込められており、電子の波動関数 ψ は $r=r_a, r_b$、$z=0, L$ でゼロになるとする。プランク定数を $\hbar(\equiv h/(2\pi))$ 、光速を c、素電荷を e、電子の質量を m_e とする。



以下の問題に答えよ。円柱座標 (r,θ,z) における次の公式を使ってよい。ここで $\mathbf{V}=V_r\mathbf{e}_r+V_\theta\mathbf{e}_\theta+V_z\mathbf{e}_z$ はベクトル関数、ϕ はスカラー関数である。

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{V} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\\
\nabla\times\mathbf{V} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r+\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z\\
\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z\\
\nabla^2\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

($\mathbf{e}_r$、$\mathbf{e}_\theta$、$\mathbf{e}_z$ は r 方向、 θ 方向、 z 方向それぞれの単位ベクトルである。)

1. 電子の全エネルギーを E とし、容器内の電子のシュレーディンガー方程式を与えよ。

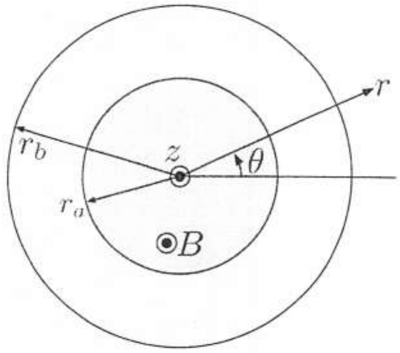
2. 電子の波動関数を $\psi=\psi_r(r)\psi_\theta(\theta)\psi_z(z)$ と変数分離し、$\psi_r(r)$、$\psi_\theta(\theta)$、$\psi_z(z)$ それぞれのシュレーディンガー方程式を与えよ。なお、z 軸向きの角運動量の量子数を m とし、また、電子の全エネルギー E を z 軸方向の運動エネルギー E_z とそれ以外のエネルギー E' の和に分け ($E=E_z+E'$)、それぞれを $E_z=(\hbar k_z)^2/(2m_e)$、$E'=(\hbar k')^2/(2m_e)$ とせよ。

3. $\psi_z(z)$ および $\psi_\theta(\theta)$ のシュレーディンガー方程式を解け。波動関数の規格化はしなくてよい。 なお、k_z の許される値を正の整数 l を用いて表せ。

4. $\psi_r(r)$ のシュレーディンガー方程式の一般解は 2 つの独立な関数 $f_m^{(1)}(k'r)$ と $f_m^{(2)}(k'r)$ を使って表せる。$f_m^{(1)}(k'r)$ と $f_m^{(2)}(k'r)$ を用いて k' を求める方程式を表せ。

5. 問 4. で求めた方程式は k' に関して離散的な解を持つ。小さい方から n 番目の解を k_{mn} として、k_{mn}、l、m を用いて系のエネルギー固有値 E_{lmn} を与えよ。

次の図は同心二重円筒容器を上から見た図である。図のように、内径の内側 $(r < r_a)$ にのみ z 向きの均一な磁場 B（磁束 Φ）がある場合を考える。



以下の問題に答えよ。

6. 磁束 Φ を導くベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の内径の外側 $(r > r_a)$ での値を円柱座標で示せ。簡単のため $A_r = 0$ とせよ。

7. 一定磁場のある時のシュレーディンガー方程式は、磁場 B を導くベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を使い、問 1. のシュレーディンガー方程式において $\nabla \to \nabla - \frac{i}{\hbar}\frac{e\mathbf{A}}{c}$ の置き換えで導くことができる。問 2. で求めた $\psi_r(r)$、$\psi_\theta(\theta)$、$\psi_z(z)$ それぞれのシュレーディンガー方程式はどのように修正されるか。

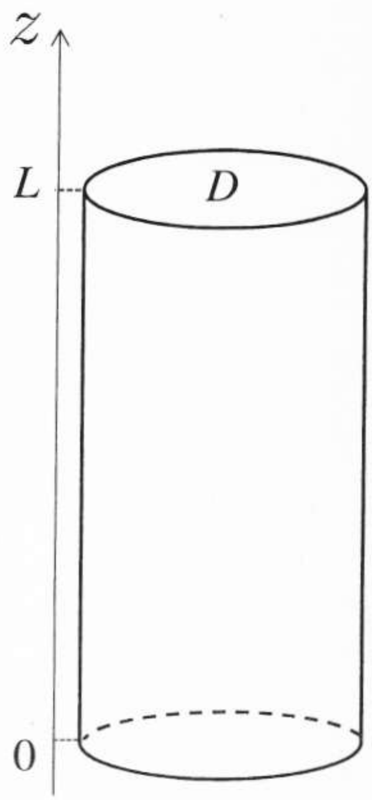
8. 導入する磁場が以下の条件を満たす時の電子のエネルギー準位は、磁場がない時のエネルギー準位と変わらないことを示せ。

$$\Phi(= \pi r_a^2 B) = \Phi_0 M, \quad (M = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

ここで $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ は磁束量子である。

物理学 [IV] (答案用紙：緑)

質量 m の粒子 N 個からなる理想気体（古典統計に従うとする）を、図のような底面積 D 高さ L の円筒中に入れて、その円筒の底の位置が $z=0$ となるように置く。系のハミルトニアンは次の式で与えられるものとする。



$$\mathscr{H} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2m} \left(p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2 \right) + mgz_i \right]. \tag{1}$$

ここで、g は重力加速度、(x_i, y_i, z_i) と (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}) は、それぞれ i 番目の粒子の座標と運動量である。この円筒は温度 T の熱浴に接し、系は熱平衡状態にあるとする。以下の問いに答えよ。必要なら次の物理定数や公式を用いてもよい。

ボルツマン定数: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}

重力加速度: $g = 9.81$ m/s^2

プランク定数: $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s

アボガドロ数: $N_A = 6.02 \times 10^{23}$

統一原子質量単位: 1 u $= 1.66 \times 10^{-27}$ kg (分子量 A の粒子の質量を A u とする)

スターリンの公式: $\log(N!) \sim N(\log N - 1)$

ガウス積分: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$

指数関数のテイラー展開: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$

対数関数のテイラー展開: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$

まず、重力が無視できる $(g=0)$ とする。

1. この系（カノニカル分布）の分配関数 Z とヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
2. 前問の結果を用いて、内部エネルギー U を求めよ。

次に、重力がある場合 ($g \neq 0$) を考える。

3. 高さ z ($< L$) における粒子密度 $n(z)$ と $z = 0$ の粒子密度 $n(0)$ の比を求めよ。
4. $z = 100$ m ($< L$) での圧力は、$z = 0$ m での圧力に比べておよそ 1 %減少したとする。$T = 273$ K として、この理想気体を構成する粒子の分子量を有効数字 1 桁で評価せよ。簡単のため、理想気体は単一の粒子で構成されているとする。また、圧力は粒子密度に比例すると考えてよい。
5. この系（カノニカル分布）の分配関数 Z とヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
6. この円筒が、底の位置が高さ $z = \zeta$ になるように置かれたとする。ヘルムホルツの自由エネルギー F_ζ を求めよ。前問で得られた F と比べて、どれだけ変化したか。
7. $L \to \infty$ のとき、1 粒子当たりの重力エネルギーの平均 $\langle mgz_i \rangle$ を求めよ。
8. 内部エネルギー U を求めよ。また、$\dfrac{mgL}{kT} \ll 1$ のときと $L \to \infty$ のときの内部エネルギーを求め、その値になる理由を述べよ。
9. $-\dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial F}{\partial L}\right)$ を計算せよ。また、この量は何を与えるか答えよ。$\dfrac{mgL}{kT} \ll 1$ の場合に、この結果が理想気体の状態方程式を与えることを確認せよ。また、$L \to \infty$ の場合はどうなるか。
10. この系の底部の圧力と上端部の圧力の差が、容器の高さ L に依存しないことを示せ。